Devoir II

Dû le mercredi 16 mars 2022

1. Sur $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on considère la forme symplectique canonique, c'est-à-dire la forme bilinéaire anti-symétrique non-dégénérée

$$\omega(\vec{x}, \vec{y}) := \vec{x}^T J \vec{y}, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^{2n}, \quad \text{où } J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I}_n \\ -\mathbb{I}_n & 0 \end{pmatrix}$$

est un endomorphisme de $\mathbb{R}^{2n}$ tel que $J^2 = -\mathbb{I}_{2n}$. Soit $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ le sous-ensemble de $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$ constitué des endomorphismes $\mathbf{A}$ préservant la forme symplectique ω, c'est-à-dire tels que

$$\omega(\mathbf{A}\vec{x}, \mathbf{A}\vec{y}) = \omega(\vec{x}, \vec{y}) \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^{2n}.$$

(a) Montrer que $\mathbf{A} \in \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ si et seulement si $\mathbf{A}^T J \mathbf{A} = J$.

(b) Montrer que $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ est un sous-groupe de Lie de $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$.

(c) Donner une description de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sp}(2n, \mathbb{R})$ de $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$.

(d) En identifiant $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ avec le sous-groupe des endomorphismes de $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$ commutant avec J, montrer que

$$\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) \cap \mathrm{GL}(n, \mathbb{C}) = U(n).$$

Indice : Sous cette identification, le produit hermitien de $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ est donné par

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle_h := \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + i\omega(\vec{x}, \vec{y}) \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^{2n},$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^{2n}$.

2. Soit G un groupe de Lie et soit N un sous-groupe de Lie de G qui est en même temps un sous-groupe normal, à savoir que

$$gng^{-1} \in N \quad \forall n \in N, g \in G.$$

Montrer alors que l'algèbre de Lie $\mathfrak{n}$ de N est un idéal de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G.

3. Montrer que $\mathfrak{su}(2)$ est une algèbre de Lie simple.

4. Soit L une algèbre de Lie de dimension finie. La **forme de Killing** de L est la forme bilinéaire $(\cdot, \cdot)_K : L \times L \to \mathbb{R}$ définie par

$$(x, y)_K := \mathrm{Tr}((\mathrm{ad}\, x)(\mathrm{ad}\, y)) \quad \forall x, y \in L.$$

(a) Montrer que la forme de Killing est symétrique.

(b) Si $L = \mathfrak{su}(2)$, montrer que $-(\cdot,\cdot)_K$ est un produit scalaire sur L (en d'autres termes la signature de la forme de Killing est $(0,3)$).

(c) Si $L = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$, montrer plutôt que $(\cdot,\cdot)_K$ est une forme bilinéaire non-dégénérée de signature (2,1), c'est-à-dire qu'il existe une base $\{u, v, w\}$ de L orthogonale par rapport à la forme de Killing telle que

$$(u,u)_K > 0, \quad (v,v)_K > 0 \quad \text{et} \quad (w,w)_K < 0.$$

(d) Conclure que les algèbres de Lie $\mathfrak{su}(2)$ et $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ ne sont pas isomorphes.