Devoir III

Dû le jeudi 14 avril 2022

1. Soit V un espace vectoriel de dimension finie et D un drapeau de V. Montrer que l'algèbre de Borel $\mathfrak{b}(D)$ n'est pas nilpotente.
2. Soient I et J deux idéaux nilpotents d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Montrer alors que leur somme $I+J$ est aussi un idéal nilpotent. Conclure que $\mathfrak{g}$ possède un idéal nilpotent maximal.
3. Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie nilpotente, montrer que sa forme de Killing est identiquement nulle.
4. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple de dimension finie et $\phi : \mathfrak{g} \to \operatorname{End}(V)$ une représentation fidèle. Montrer que l'opérateur de Casimir c_ϕ ne dépend pas du choix de la base de $\mathfrak{g}$.
5. Soit $\{X, Y\}$ la base canonique de $\mathbb{C}^2$. On peut alors étendre l'action de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ à l'anneau de polynômes $\mathbb{C}[X,Y]$ en utilisant la règle de Leibniz :

$$\xi(fg) = (\xi f)g + f(\xi g) \quad \text{pour} \quad \xi \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}),\ f,g \in \mathbb{C}[X,Y].$$

   (a) Montrer qu'avec cette action, $\mathbb{C}[X,Y]$ est une représentation (de dimension infinie) de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.

   (b) Montrer que le sous-espace des polynômes homogènes de degré m est une sous-représentation de $\mathbb{C}[X,Y]$ isomorphe à W_m, c'est-à-dire à l'unique représentation irréductible de dimension $m+1$ de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.
6. Montrer que le produit tensoriel $W_3 \otimes_{\mathbb{C}} W_7$, qui est naturellement une représentation de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$, est isomorphe en tant que représentation à la somme directe

$$W_4 \oplus W_6 \oplus W_8 \oplus W_{10}.$$

7. Montrer que la complexification $\mathfrak{su}(2) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ de $\mathfrak{su}(2)$ est isomorphe, en tant qu'algèbre de Lie complexe, à $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$.
8. La représentation W_m de $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ induit par restriction une représentation de $\mathfrak{su}(2)$

$$\phi_m : \mathfrak{su}(2) \to \operatorname{End}(W_m).$$

   Comme le groupe de Lie $\mathrm{SU}(2)$ est simplement connexe, l'application exponentielle est surjective et induit une représentation $\Phi_m : \mathrm{SU}(2) \to \mathrm{GL}(W_m)$ en posant

$$\Phi_m(\exp(\xi)) := \exp(\phi_m(\xi)) \quad \text{pour } \xi \in \mathfrak{su}(2).$$

   (a) Montrer que $\Phi_m(-\operatorname{Id}_{\mathbb{C}^2}) = (-1)^m \operatorname{Id}_{W_m}$.

   (b) En termes du numéro 2 du premier devoir, on sait que $\mathrm{SO}(3) \cong \mathrm{SU}(2)/\{\pm \operatorname{Id}_{\mathbb{C}^2}\}$. En déduire que la représentation Φ_m induit une représentation de $\mathrm{SO}(3)$ lorsque m est pair.