MAT7610 : Devoir III

Dû le vendredi 9 décembre 2022

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$ dont le bord est lisse. Alors le graphe dans $\Omega \times \mathbb{R}$ d'une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est une hypersurface minimale pourvu que

$$\sum_{i=1}^{n} D_i \left(\frac{D_i u}{(1+|Du|^2)^{\frac{1}{2}}} \right) = 0. \tag{1}$$

Dans ce devoir, nous allons considérer le problème de Plateau suivant : trouver une solution à cette équation en imposant une condition au bord $u|_{\partial\Omega} = \varphi$, où $\varphi \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ sera de norme assez petite. Pour ce faire, on travaillera sur l'espace de Banach

$$\mathcal{B} := \{ v \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \mid v|_{\partial\Omega} = 0 \}.$$

muni de la norme $\|v\|_{\mathcal{B}} := |v|_{2,\alpha,\Omega}$. Pour $\epsilon > 0$, on considérera le sous-ensemble fermé de $\mathcal{B}$ donné par

$$\mathcal{K}_\epsilon := \{ v \in \mathcal{B} \mid \|v\|_{\mathcal{B}} \leq \epsilon \}.$$

1. Montrer que l'équation (1) peut se mettre sous la forme

$$\sum_{i,j} a^{ij}(Du) D_{ij} u = 0 \quad \text{avec} \quad a^{ij}(Du) := \delta_{ij}(1+|Du|^2) - (D_i u)(D_j u) \tag{2}$$

   De plus, en utilisant possiblement l'inégalité de Cauchy-Schwarz, établir que

$$a^{ij}(Du)\xi_i \xi_j \geq |\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

   ce qui montre que (2) est une équation quasi-linéaire elliptique.

2. En posant $u = v + \varphi$, mettre l'équation (2) sous la forme

$$L_\varphi v = f_\varphi + Q(D\varphi, D^2\varphi, Dv, D^2 v),$$

   où

$$L_\varphi := a^{ij}(D\varphi) D_{ij} + b^i_\varphi D_i \quad \text{avec} \quad b^i_\varphi := 2(\Delta\varphi) D_i \varphi - 2 \sum_j D_j \varphi D_{ij} \varphi,$$

$$f_\varphi := - \sum_{i,j} a^{ij}(D\varphi) D_{ij} \varphi$$

   et $Q(D\varphi, D^2\varphi, Dv, D^2 v)$ est une somme de termes quadratiques et cubiques en v.

3. Écrivons $Q(v) = Q(D\varphi, D^2\varphi, Dv, D^2v)$ pour alléger la notation. Pour φ telle que $|\varphi|_{2,\alpha,\Omega} \leq N$ pour un certain $N \geq 1$, montrer qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de ϵ et N telle pour tous $v, w \in \mathcal{K}_\epsilon$,

$$|Q(v) - Q(w)|_{0,\alpha,\Omega} \leq CN(1+\epsilon)\epsilon\|v - w\|_{\mathcal{B}}$$

4. Soit $T_\varphi : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ l'opérateur qui à $w \in \mathcal{B}$ associe l'unique solution $v \in \mathcal{B}$ à l'équation

$$L_\varphi v = f_\varphi + Q(w)$$

fourni par le théorème d'existence [GT01, Theorem 6.14]. Pour $\epsilon > 0$ assez petit, montrer que

$$\|T_\varphi(v) - T_\varphi(w)\|_{\mathcal{B}} \leq \frac{1}{2}\|v - w\|_{\mathcal{B}} \quad \forall v, w \in \mathcal{K}_\epsilon. \tag{3}$$

Indice : utiliser l'estimation à la toute fin de [GT01, § 6.3].

5. Pour $\epsilon > 0$ tel que (3) est valide, montrer qu'il existe $\delta > 0$ dépendant de ϵ tel que $T_\varphi(\mathcal{K}_\epsilon) \subset \mathcal{K}_\epsilon$ dès que $|\varphi|_{2,\alpha,\Omega} < \delta$.

6. Pour $\varphi \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ tel que $|\varphi|_{2,\alpha,\Omega} < \delta$ comme au numéro précédent, appliquer le théorème du point fixe de Banach à $T_\varphi : \mathcal{K}_\epsilon \to \mathcal{K}_\epsilon$ pour conclure que (1) possède une unique solution $u \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ telle que $u - \varphi \in \mathcal{K}_\epsilon$. En particulier, $u|_{\partial\Omega} = \varphi|_{\partial\Omega}$.

Références

[GT01] David Gilbarg and Neil S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order.* Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1998 edition.