MAT7610 : Devoir II

Dû le vendredi 11 novembre 2022

1. Soit Ω un domaine borné ayant un bord de classe $\mathcal{C}^1$. En utilisant le principe du maximum, montrer que les seules solutions $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ au problème de Neumann
$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{sur } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$
sont les fonctions constantes.

2. Soit $L = a^{ij}(x)D_{ij} + b^j(x)D_j + c(x)$ un opérateur elliptique sur un domaine Ω.
   (a) Si $c < 0$ et $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ est telle que $Lu \geq 0$ (respectivement $Lu \leq 0$), montrer (sans faire aucune hypothèse sur les coefficients b^i) que u ne peut pas atteindre de maximum strictement positif (respectivement de minimum strictement négatif) sur Ω.
   (b) Si $c < 0$, que Ω est un domaine borné et que $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ est telle que $Lu = f$ sur Ω, montrer que
$$\sup_{\Omega} |u| \leq \sup_{\partial\Omega} |u| + \sup_{\Omega} \left| \frac{f}{c} \right|.$$

3. Soit Ω un domaine borné. Pour $k \in \mathbb{N}_0$ et $\alpha \in (0,1)$, montrer que $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ muni de la norme $\| \cdot \|_{\mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{\Omega})}$ est un espace de Banach.

4. Soient Ω un domaine borné et $\alpha, \beta \in (0,1)$. Montrer qu'il existe une constante C dépendant de α, β et du diamètre de Ω telle que pour toutes fonctions $u \in \mathcal{C}^{\alpha}(\overline{\Omega})$ et $v \in \mathcal{C}^{\beta}(\overline{\Omega})$, $uv \in \mathcal{C}^{\gamma}(\overline{\Omega})$ pour $\gamma := \min\{\alpha, \beta\}$ avec
$$\|uv\|_{C^{\gamma}(\overline{\Omega})} \leq C \|u\|_{\mathcal{C}^{\alpha}(\overline{\Omega})} \|v\|_{\mathcal{C}^{\beta}(\overline{\Omega})}.$$

5. Soit $\{u_i\}$ une suite bornée de $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega)$ sur un domaine Ω, où $\alpha \in (0,1)$. Par le théorème de Arzela-Ascoli et un argument de diagonalisation, on sait qu'il existe une sous-suite $\{u_{i_j}\}$ convergeant vers une fonction $u \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ uniformément sur tout sous-ensemble compact de Ω. Montrer qu'en fait $u \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega)$, c'est-à-dire que les dérivées d'ordre k de u sont localement α-höldériennes.

6. Soit Ω un domaine borné et soient $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ et $f \in \mathcal{C}^{\alpha}(\Omega)$ des fonctions telles que $\Delta u = f$ et $u|_{\partial\Omega} = \varphi$ pour une fonction continue $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une constante C ne dépendant que de n, $\alpha \in (0,1)$ et du diamètre de Ω telle que
$$|u|^*_{2,\alpha,\Omega} \leq C(\sup_{\partial\Omega} |\varphi| + |f|^{(2)}_{0,\alpha,\Omega}).$$
Indice : Utiliser une borne a priopri sur la solution.