MAT7610 : Devoir I

Dû le mardi 11 octobre 2022

1. Soit
$$G(x,y) = \Gamma\left(\sqrt{|x|^2+|y|^2-2x\cdot y}\right) - \Gamma\left(\sqrt{\frac{|x|^2|y|^2}{R^2}+R^2-2x\cdot y}\right)$$
la fonction de Green de première espèce sur la boule $B_R(0)$. Montrer que $G(x,y) \leq 0$ pour tous $x, y \in B_R(0)$ tels que $x \neq y$.

2. Soit u une fonction harmonique positive sur la boule $B_R(0)$. Déduire la version suivante de l'inégalité d'Harnack en utilisant la formule de Poisson :
$$\frac{R^{n-2}(R-|x|)}{(R+|x|)^{n-1}}u(0) \leq u(x) \leq \frac{R^{n-2}(R+|x|)}{(R-|x|)^{n-1}}u(0).$$

3. (Principe de réflexion de Schwarz) Soit $\Omega^+ \subset \mathbb{R}^n$ un sous-domaine du demi-espace $x_n > 0$ dont une partie de son bord est un ouvert T non-vide de l'hyperplan $x_n = 0$. Si u est une fonction harmonique sur Ω^+, continue sur $\Omega^+ \cup T$ et telle que $u = 0$ sur T, alors montrer que la fonction U définie par
$$U(x_1,\dots,x_n) = \begin{cases} u(x_1,\dots,x_n), & x_n \geq 0, \\ -u(x_1,\dots,x_{n-1},-x_n), & x_n < 0 \end{cases}$$
est une fonction harmonique sur le domaine $\Omega^+ \cup T \cup \Omega^-$, où Ω^- est la réflexion de Ω^+ par rapport à l'hyperplan $x_n = 0$. *Indice : Le théorème d'existence sur les boules pour le problème de Dirichlet pourrait être utile.*

4. (Théorème de Liouville) Si u est une fonction harmonique bornée sur $\mathbb{R}^n$, montrer que u est forcément une fonction constante. *Indice : Les estimations intérieures des dérivées d'une fonction harmonique pourraient être utiles.*

5. Soit $u \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ une fonction sous-harmonique sur un domaine Ω. Si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, montrer que forcément $\Delta u \geq 0$ partout sur Ω.

6. Montrer qu'une fonction $u \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ est sous-harmonique sur Ω si et seulement si elle satisfait à l'inégalité de la valeur moyenne localement, c'est-à-dire que pour tout $y \in \Omega$, il existe $\delta = \delta(y) > 0$ tel que
$$u(y) \leq \frac{1}{n\omega_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(y)} u ds. \quad \forall R \leq \delta.$$
Indice : Si une fonction continue satisfait à l'inégalité de la valeur moyenne localement, montrer qu'elle satisfait aussi au principe du maximum.