MAT8100: Devoir III

Dû le mercredi 4 décembre 2024

Dans les problèmes qui suivent, $\mathcal{U}$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ avec bord $\partial\mathcal{U}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. De plus, les opérateurs différentiels sont supposés uniformément elliptiques avec coefficients a^{ij}, b^i et c lisses.

1. Considérons l'opérateur différentiel

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} (a^{ij} u_{x_i})_{x_j} + cu.$$

Montrez qu'il existe une constante $\mu > 0$ telle que l'opérateur bilinéaire $B[\cdot,\cdot]$ satisfait aux hypothèses du théorème de Lax-Milgram pourvu que

$$c(x) \geq -\mu \quad \forall x \in \mathcal{U}.$$

2. Une fonction $u \in H_0^2(\mathcal{U})$ (la fermeture de $C_c^\infty(\mathcal{U})$ dans $H^2(\mathcal{U})$), est une **solution faible** de l'équation biharmonique

$$\begin{cases} \Delta^2 u = f & \text{sur } \mathcal{U}, \\ u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{U}, \end{cases} \tag{1}$$

pourvu que

$$\int_{\mathcal{U}} \Delta u \Delta v dx = \int_{\mathcal{U}} f v dx \quad \forall v \in H_0^2(\mathcal{U}).$$

Si $f \in L^2(\mathcal{U})$, montrer que l'équation (1) possède une unique solution faible.

3. Supposons que $\mathcal{U}$ soit connexe. Une fonction $u \in H^1(\mathcal{U})$ est une **solution faible** au problème de Neumann

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{sur } \mathcal{U}, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \partial\mathcal{U}, \end{cases} \tag{2}$$

si

$$\int_{\mathcal{U}} Du \cdot Dv dx = \int_{\mathcal{U}} f v dx \quad \forall v \in H^1(\mathcal{U}).$$

   (a) Si $f \in L^2(\mathcal{U})$, montrez que l'équation (2) possède une solution faible si et seulement si

$$\int_{\mathcal{U}} f dx = 0.$$

   Indice: La formule de Green pourrait être utile (voir par exemple le Théorème 3 de l'appendice C du livre de Evans).

   (b) Si $f = 0$, montrez que les seules solutions faibles de (2) sont les fonctions constantes.

4. Considérons l'équation
$$-\Delta u + c(u) = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n, \tag{3}$$
où $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ et $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction lisse telle que $c(0) = 0$ et c' est bornée.
   (a) Expliquez dans quel sens une fonction $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ avec support compact peut être vue comme une solution faible de (3). (*Indice*: Le numéro 4 du Devoir II pourrait être utile)
   (b) Si une fonction $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ à support compact est une solution faible de (3), montrez qu'en fait $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$.

5. On considère l'équation non-linéaire
$$\Delta u = u^4 \quad \text{sur } \mathcal{U}. \tag{4}$$
   (a) (multiplicativité des espaces de Sobolev) Pour $p \in [1, \infty)$ et $k \in \mathbb{N}$ tel que $k > \frac{n}{p}$, montrez qu'il existe une application bilinéaire **continue**
$$m : W^{k,p}(\mathcal{U}) \times W^{k,p}(\mathcal{U}) \to W^{k,p}(\mathcal{U})$$
   qui est donnée par la multiplication usuelle $m(u, v) = uv$ lorsque u et v sont des fonctions continues.

   Indice: L'étape principale consiste à esitmer la norme L^p de $D^\alpha u D^\beta v$ pour $|\alpha+\beta| \leq k$ en termes des normes de Sobolev de u et v. Considérez les cas suivants
      (i) $k - |\alpha| > \frac{n}{p}$,
      (ii) $k - |\beta| > \frac{n}{p}$,
      (iii) $k - |\alpha| \leq \frac{n}{p}$ et $k - |\beta| \leq \frac{n}{p}$,

   séparément.
   (b) Pour $k > \frac{n}{2}$, expliquez dans quel sens une fonction $u \in H^k(\mathcal{U})$ peut-être considérée comme une solution faible de (4).
   (c) Si $u \in H^k(\mathcal{U})$ est une solution faible de
$$\Delta u = u^4$$
   avec $k > \frac{n}{2}$, montrez que u est en fait une fonction lisse sur $\mathcal{U}$.