MAT8100 : Devoir II

Dû le mercredi 6 novembre 2024

Dans les problèmes qui suivent, $\mathcal{U}$ dénote un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

1. Soit $\mathcal{C}^0_B(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}^n$ et considérons la norme

$$\|f\|_{\mathcal{C}^0} := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)| \quad \text{pour } f \in \mathcal{C}^0_B(\mathbb{R}^n).$$

En utilisant le théorème d'Arzela-Ascoli, montrer que l'espace normé $(\mathcal{C}^0_B(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{\mathcal{C}^0})$ est un espace de Banach.

2. Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
   (a) Pour $1 \le q < p \le \infty$, montrer qu'il existe $f \in L^q(\mathcal{U})$ qui n'est pas un élément de $L^p(\mathcal{U})$.
   (b) Si $\mathcal{U}$ est borné, montrer à l'aide de l'inégalité de Hölder que pour $1 \le q \le p \le \infty$, il existe une constant $C > 0$ dépendant de $\mathcal{U}$ telle que

$$\|u\|_{L^q} \le C\|u\|_{L^p} \quad \forall\, u \in L^p(\mathcal{U}).$$

   En particulier, $L^p(\mathcal{U}) \subset L^q(\mathcal{U})$ dans ce cas.
   (c) Si plutôt $\mathcal{U} = \mathbb{R}^n$, montrer que pour $1 \le q < p \le \infty$, il existe un élément $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ qui n'est pas dans $L^q(\mathbb{R}^n)$.

3. Intégrer par parties pour établir qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\int_{\mathcal{U}} |Du|^2 dx \le C \left(\int_{\mathcal{U}} u^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathcal{U}} |D^2 u|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

pour tout $u \in C^\infty_c(\mathcal{U})$. En utilisant des approximations, montrer que l'inégalité reste valide si on a plus généralement $u \in W^{2,2}(\mathcal{U}) \cap W^{1,2}_0(\mathcal{U})$.

4. Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continûment différentiable telle que F' soit bornée. Si $\mathcal{U}$ est borné et $u \in W^{1,p}(\mathcal{U})$ pour un certain $1 < p < \infty$, montrer que

$$v := F(u) \in W^{1,p}(\mathcal{U}) \quad \text{et} \quad v_{x_i} = F'(u)u_{x_i}\ \forall i \in \{1,\dots,n\}.$$

5. Supposons que $\mathcal{U}$ soit borné avec bord ∂U de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $u : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ une fonction et posons

$$u^+(x) = \begin{cases} u(x), & \text{si } u(x) > 0, \\ 0, & \text{si } u(x) \le 0 \end{cases} \qquad \text{et} \quad u^-(x) = \begin{cases} u(x), & \text{si } u(x) < 0, \\ 0, & \text{si } u(x) \ge 0. \end{cases}$$

(a) Montrer que si $u \in W^{1,p}(\mathcal{U})$, alors $u^\pm \in W^{1,p}(\mathcal{U})$ avec

$$Du^+(x) = \begin{cases} Du(x), & \text{p.p. sur } \{x \in \mathcal{U} \mid u(x) > 0\}, \\ 0, & \text{p.p. sur } \{x \in \mathcal{U} \mid u(x) \leq 0\} \end{cases}$$

et

$$Du^-(x) = \begin{cases} Du(x), & \text{p.p. sur } \{x \in \mathcal{U} \mid u(x) < 0\}, \\ 0, & \text{p.p. sur } \{x \in \mathcal{U} \mid u(x) \geq 0\}. \end{cases}$$

Indice : $u^+ = \lim_{\epsilon \to 0} F_\epsilon(u)$ avec

$$F_\epsilon(z) := \begin{cases} (z^2 + \epsilon^2)^{\frac{1}{2}} - \epsilon & \text{si } z \geq 0, \\ 0 & \text{si } z < 0. \end{cases}$$

(b) Montrer que $u \in W^{1,p}(\mathcal{U}) \implies |u| \in W^{1,p}(\mathcal{U})$.

(c) Si $u \in W^{1,p}(\mathcal{U})$, alors montrer que $Du = 0$ presque partout sur $\{x \in \mathcal{U} \mid u(x) = 0\}$.

(d) Montrer que $u \in C^\infty(\overline{\mathcal{U}}) \implies |u|^p \in W^{1,1}(\mathcal{U})$ avec

$$\frac{\partial |u|^p}{\partial x_i} = p|u|^{p-1} \operatorname{sign} u \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \forall\, i \in \{1, \ldots, n\}.$$