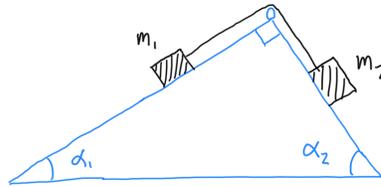


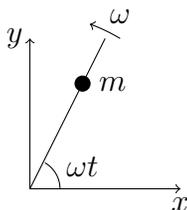
MAT8100 : Devoir I

Dû le mercredi 9 octobre 2024

1. Soient deux cercles C_1 et C_2 centrés à l'origine de rayons r_1 et r_2 dans le plan xy . On considère une surface de révolution obtenue en faisant pivoter autour de l'axe des z le graphe $z = f(x)$ d'une fonction $f : [r_1, r_2] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(r_1) = f(r_2) = 0$. Déterminer la forme de la surface qui minimisera son aire.
2. Utiliser le principe du travail virtuel de d'Alembert pour déterminer les conditions d'équilibre de deux masses m_1 et m_2 placées sur un double plan incliné et reliées par un fil inextensible sans masse en l'absence de frottement tel qu'illustré.



3. Un oscillateur harmonique bi-dimensionnel consiste en une particule qui subit une force décrite par le potentiel $U(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$, où r est la distance de la particule par rapport à l'origine, m dénote la masse de la particule et ω est une constante positive. En coordonnées polaires, l'énergie cinétique de la particule est donnée par $T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$.
 - (a) Donner les équations d'Euler-Lagrange associées au lagrangien $L = T - U$ du système dans les coordonnées (r, θ) .
 - (b) Calculer l'hamiltonien H en termes des coordonnées $r, \theta, p_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}}$ et $p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}$.
 - (c) Donner les équations d'Hamilton associées à l'hamiltonien du problème précédent.
 - (d) Y a-t-il des quantités qui sont conservées le long de la trajectoire physique de la particule ?
4. Une perle de masse m glisse sans frottement le long d'un fil rectiligne rigide tournant à une vitesse angulaire constante ω dans un plan tel qu'illustré :



Si r dénote la distance de la perle par rapport au centre de rotation du fil rectiligne, alors le lagrangien associé à ce système est donné par

$$L(r, \dot{r}, t) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + \omega^2 r^2).$$

- (a) Quelles sont les équations d'Euler-Lagrange de ce système ?
- (b) Quel est l'hamiltonien $H(p, q)$ de ce système ?
- (c) Si initialement $r(0) = r_0 > 0$ et $\dot{r}(0) = 0$, quelle est la trajectoire de la perle ?
- (d) Est-ce que l'énergie cinétique totale de la perle est préservée le long de sa trajectoire physique ?