MAT993E : Devoir I

Dû en classe le mardi 18 mars 2014

1. Pour $t \in [0,T]$, soit $g(t)$ une famille lisse de métriques riemanniennes sur une variété compacte sans bord M.

   (a) Pour $C \in \mathbb{R}$ une constante, établissez la dichotomie suivante : Si u et v sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,T] \times M$ telles que $u(0,m) \geq v(0,m)$ pour tout $m \in M$, alors exactement l'une des deux situations suivantes se produit :
   (i) $u(t,m) \geq v(t,m)$pour tout $(t,m) \in [0,T] \times M$;
   (ii) il existe $(t,m) \in (0,T] \times M$ tel que

   $$\begin{gathered} u(t,m) < v(t,m) \\ \nabla u(t,m) = \nabla v(t,m) \\ \Delta_{g(t)} u(t,m) \geq \Delta_{g(t)} v(t,m) \\ \tfrac{d}{dt} u(t,m) \leq \tfrac{d}{dt} v(t,m) - C(v(t,m) - u(t,m)) \end{gathered}$$

   où $\Delta_{g(t)}$ est le Laplacien (avec spectre négatif) associé à la métrique $g(t)$.
   Indice : En remplaçant u, v par $(u-v), 0$, on peut supposer que $v = 0$. En remplaçant u par $e^{-Ct}u$, on peut supposer que $C = 0$.

   (b) Supposez que les fonctions u et v ci-haut sont telles que

   $$\begin{gathered} \tfrac{d}{dt} u(t,m) \geq \Delta_{g(t)} u(t,m) + F(t,m,u(t,m)), \\ \tfrac{d}{dt} v(t,m) \leq \Delta_{g(t)} v(t,m) + F(t,m,v(t,m)), \end{gathered}$$

   pour tout $(t,m) \in [0,T] \times M$, où $F : [0,T] \times M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction uniformément Lipschitz dans la dernière variable, c'est-à-dire qu'il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $(t,m) \in [0,T] \times M$,

   $$|F(t,m,x_1) - F(t,m,x_2)| \leq K|x_1 - x_2|, \quad \forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

   Montrez que si $u(0,m) \geq v(0,m)$ pour tout $m \in M$, alors en fait $u(t,m) \geq v(t,m)$ pour tout $(t,m) \in [0,T] \times M$.
   Indice : Choisissez la constante C en (a) de sorte qu'elle soit plus grande que la constante de Lipschitz de la fonction F.

   (c) Soit $h \in \mathcal{C}^2([0,T] \times M)$ une fonction telle que $\dfrac{dh}{dt} \leq \Delta_{g(t)} h + \rho h$ pour une certaine constante $\rho \in \mathbb{R}$. Montrez alors que pour tout $t \in [0,T]$,

   $$\max_{m \in M} h(t,m) \leq Ce^{\rho t} \quad \text{où } \; C = \max_{m \in M} h(0,m).$$

   Indice : Tentez d'utiliser le résultat précédent avec $u = Ce^{\rho t}$ et $v = h$.

2. Soit Σ une surface compacte dont la caractéristique d'Euler est négative. Soit $(\Sigma, g(t))$ une solution du flot de Ricci normalisé ayant pour condition initiale $g(0) = g_0$. On a vu en classe que le flot existe pour tous les temps et qu'il existe une contante $C > 0$ telle que

$$-Ce^{\rho t} \leq R - \rho \leq Ce^{\rho t} \quad \forall\, t \geq 0, \tag{$\dagger$}$$

où ρ est la moyenne de la courbure scalaire (une constante négative le long du flot de Ricci normalisé).

   (a) Montrez que $g(t)$ pour $t \in [0, \infty)$ est une famille de métriques uniformément quasi-isométriques, c'est-à-dire qu'il existe une constante $K > 0$ telle que

   $$\frac{g(0)}{K} \leq g(t) \leq Kg(0) \quad \forall\, t \geq 0.$$

   De plus, montrez que lorsque t tend vers l'infini, cette famille tend vers une métrique continue $g(\infty) \in \mathcal{C}^0(M; S^2(T^*M))$ telle que $\frac{g(0)}{K} \leq g(\infty) \leq Kg(0)$.

   (b) Posons $\widehat{R} = R - \rho$. Établissez par induction sur $\alpha > 0$ que $\nabla^\alpha \widehat{R}$ sastifait à une équation d'évolution de la forme

   $$\frac{d\nabla^\alpha \widehat{R}}{dt} = \Delta_{g(t)}(\nabla^\alpha \widehat{R}) + \rho \nabla^\alpha \widehat{R} + \sum_{\mu+\nu=\alpha} \nabla^\mu \widehat{R} * \nabla^\nu \widehat{R},$$

   où $A * B$ dénote une combinaison linéaire de tenseurs obtenue en contractant des indices en utilisant la métrique $g(t)$.

   (c) Déduisez de l'équation précédente que $|\nabla^\alpha \widehat{R}|^2_{g(t)}$ sastifait à une équation d'évolution de la forme

   $$\frac{d}{dt}|\nabla^\alpha \widehat{R}|^2_{g(t)} = \Delta_{g(t)}|\nabla^\alpha \widehat{R}|^2_{g(t)} + 2\rho|\nabla^\alpha \widehat{R}|^2_{g(t)} - 2|\nabla^{\alpha+1}\widehat{R}|^2_{g(t)} + \sum_{\mu+\nu=\alpha} \nabla^\mu \widehat{R} * \nabla^\nu \widehat{R} * \nabla^\alpha \widehat{R}.$$

   (d) En utilisant l'inégalité d'interpolation de Hamilton [Ham82, Corollary 12.6], établissez l'inégalité suivante pour tout $t \in [0, \infty)$,

   $$\frac{d}{dt}\left(\int_\Sigma |\nabla^\alpha \widehat{R}|^2_{g(t)} d\mu(g(t))\right) \leq C_\alpha \max_\Sigma |\widehat{R}| \int_\Sigma |\nabla^\alpha \widehat{R}|^2_{g(t)} d\mu(g(t)),$$

   où $C_\alpha > 0$ est une constante ne dépendant que de α et de ρ.

   (e) En utilisant l'estimation ($\dagger$) et le résultat précédent, montrez qu'il existe une constante C_α ne dépendant que de α, ρ et de la métrique initiale telle que

   $$\int_\Sigma |\nabla^\alpha \widehat{R}|^2_{g(t)} d\mu(g(t)) \leq C_\alpha \quad \forall\, t \in [0, \infty).$$

(f) En utilisant à nouveau l'inégalité d'interpolation de Hamilton [Ham82, Corollary 12.6], montrez qu'il existe des constantes positives C et δ ne dépendant que de α, p et ρ telles que

$$\int_\Sigma |\nabla^\alpha \widehat{R}|^p_{g(t)} d\mu(g(t)) \leq Ce^{-\delta t} \quad \forall\, t \geq 0.$$

(g) Montrez qu'il existe des constantes positives C et δ ne dépendant que de $\alpha \in \mathbb{N}$ et ρ telles que

$$\max_\Sigma |\nabla^\alpha R|_{g(t)} = \max_\Sigma |\nabla^\alpha \widehat{R}|_{g(t)} \leq Ce^{-\delta t}, \quad \forall\, t \geq 0.$$

(h) Montrez que la métrique $g(\infty)$ est une métrique lisse à courbure scalaire constante et que pour tout $k \in \mathbb{N}_0$, $g(t)$ converge exponentiellement rapidement vers $g(\infty)$ dans la norme $\mathcal{C}^k$ de la métrique g_0 lorsque $t \to \infty$, c'est-à-dire qu'il existe des constantes positives C et δ ne dépendant que de k et ρ telles que

$$\sum_{\alpha=0}^{k} \max_\Sigma |(\nabla^{g_0})^\alpha (g(t) - g(\infty))|_{g_0} \leq Ce^{-\delta t}, \quad \forall\, t \geq 0,$$

où ∇^{g_0} est la connexion de Levi-Civita de la métrique initiale g_0.

3. Sur une variété riemanienne (M, g) de dimension 3, considérons le tenseur $Q_{ij} = 6S_{ij} - 3RR_{ij} + (R^2 - 2S)g_{ij}$ introduit par Hamilton [Ham82, p.278], où $S_{ij} = R_{ik}g^{kl}R_{lj}$ et $S = g^{ij}S_{ij}$.

(a) Si en un point m on diagonalise g_{ij} et R_{ij} de sorte que $g_{ij} = \delta_{ij}$ et

$$R_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix},$$

alors Q_{ij} est aussi une matrice diagonale en m. Montrez que

$$Q_{11} = 2\lambda^2 - \mu^2 - \nu^2 - \lambda\mu - \lambda\nu + 2\mu\nu.$$

(b) Montrez que si $R_{ij}v^i = 0$ en $m \in M$ pour un certain $v \in T_mM$, alors $-Q_{ij}v^iv^j \geq 0$.
Indice : Dans la notation de la partie (a), établissez d'abord que cela correspond à montrer que si $\lambda = 0$, alors $-Q_{11} \geq 0$.

Références

[Ham82] Richard S. Hamilton. Three-manifolds with positive Ricci curvature. *J. Differential Geom.*, 17(2) :255–306, 1982.