MAT993K : Devoir I

Dû en classe le jeudi 2 novembre 2017

1. Montrer que $\mathbb{S}_k^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}_k^n \; ; \; |x| = 1\}$ est une p-sous-variété de la variété à coins $\mathbb{R}_k^n$.

2. Soient X_1 et X_2 deux pré-variétés à coins de même dimension et soient S_1 et S_2 des p-sous-variétés compactes de X_1 et X_2 respectivement. Soit $F : X_1 \to X_2$ une application bordante lisse envoyant S_1 difféomorphiquement sur S_2 et telle que $dF_p : T_pX_1 \to T_pX_2$ et la différentielle bordante $d_bF_p : {}^bT_pX_1 \to {}^bT_pX_2$ soient des isomorphismes pour tout $p \in S_1$. Montrer alors qu'il existe des voisinages ouverts $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$ de S_1 et S_2 tels que la restriction de F à $\mathcal{U}_1$ induise un difféomorphisme $F : \mathcal{U}_1 \to \mathcal{U}_2$.

3. Soit X une pré-variété à coins compacte et $\xi \in \mathfrak{X}(X)$ un champ de vecteurs pointant vers l'intérieur. Dénotons par $\varphi_\xi : [0, \infty) \times X \to X$ le flot engendré par ce champ de vecteur.
   (a) Montrer qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $\varphi_\xi^t := \varphi_\xi(t, \cdot)$ induit un difféomorphisme de X sur son image pour tout $t \in [0, \epsilon)$.
   (b) Supposons que ξ pointe strictement vers l'intérieur, c'est-à -dire que pour toute carte locale centrée $\phi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}_k^n$, on a que $\xi(x_i \circ \phi)|_{(x_i \circ \phi)^{-1}(0)} > 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$. Montrer alors que $\varphi_\xi^t(X)$ est inclus dans $X \setminus \partial X$ pour tout $t > 0$.
   (c) Les réponses aux sous-questions précédentes complètent la preuve de l'existence d'un plongement de X dans une variété compacte sans bord Y. Montrer qu'il existe un champ de vecteurs $\eta \in \mathfrak{X}(Y)$ dont la restriction à X donne ξ.
   (d) En conclure que φ_ξ^t induit un difféomorphisme sur son image pour tout $t \geq 0$.
   (e) Si ξ est un champ de vecteur bordant, montrer alors que son flot se prolonge en une application $\varphi_\xi : \mathbb{R} \times X \to X$ telle que $\varphi_\xi^t \circ \varphi_\xi^s = \varphi_\xi^{t+s}$ pour tous $s, t \in \mathbb{R}$.

4. Soit X une pré-variété à coins paracompacte. Montrer qu'il existe une métrique riemannienne lisse au sens des orbifolds sur X.

5. Soit X une pré-variété à coins compacte. Un fibré vectoriel de rang ℓ au sens des orbifolds sur X est un orbifold E (qui n'est pas nécessairement une pré-variété à coins) et une application $\pi : E \to X$ lisse au sens des orbifolds où la condition de trivialité locale est remplacée par la condition que pour tout point $p \in X$, il existe une carte au sens des orbifolds $\phi : U \to V \subset \mathbb{R}^n/\Gamma_k$ centrée en p, une carte correspondante $\Phi : \pi^{-1}(\mathcal{U}) \to (\widetilde{V} \times \mathbb{R}^\ell)/\Gamma_k$, où $\widetilde{V}$ est l'image inverse de V par l'application quotient $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n/\Gamma_k$ et Γ_k agit linéairement sur $\mathbb{R}^\ell$ de sorte que le diagramme suivant commute,

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(\mathcal{U}) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "\pi"] & (\widetilde{V} \times \mathbb{R}^\ell)/\Gamma_k \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] & \widetilde{V} \times \mathbb{R}^\ell \arrow[l, "q"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"'] \\ \mathcal{U} \arrow[r, "\phi"] & V & \widetilde{V}, \arrow[l, "q"] \end{tikzcd} \tag{1}$$

où les applications horizontales à droite sont les applications de quotient et l'application verticale du milieu est bien définie grâce à l'équivariance de la projection pr_1.

(a) Soit Y un sous-orbifold de X. Donner une définition de son fibré normal en tant que fibré vectoriel au sens des orbifolds.

(b) Quel est le lien avec le fibré normal des p-sous-variétés introduit en classe ?

(c) Montrer que les faces bordantes de codimension ℓ (i.e. les composantes connexes de $\partial_\ell X$) qui sont des p-sous-variétés admettent un voisinage tubulaire. *Indice : Utiliser la preuve en classe en utilisant le fibré normal au sens des orbifolds.*

(d) Montrer que les faces bordantes de codimension ℓ sont des p-sous-variétés lorsque ℓ est maximal.

(e) Conclure qu'il possible d'obtenir une variété à coins en éclatant un nombre fini de faces de X.

6. Soit X une variété à coins compacte. On dit qu'une hypersurface bordante $H \in M_1(X)$ peut être contractée s'il existe une application surjective lisse $\beta : X \to Y$ sur une variété à coins lisse telle que X peut être vue comme l'éclatement de Y en $\beta(H)$ avec β comme application de contraction.

(a) Expliquer de quelle structure géométrique H doit être munie pour qu'il soit possible de la contracter.

(b) Montrer par un exemple qu'il est parfois possible de contracter une hypersurface bordante H de deux manières différentes.