Paru dans les Actes du 4e Colloque de didactique des mathématiques de l'Université de Crête (Rethymnon, avril 2005). M. Kourkoulos, G. Troulis et C. Tzanakis, éds.

Une expérimentation sur l'apprentissage de la structure déductive en démonstration

Denis Tanguay
Université du Québec à Montréal
Département de mathématiques, section didactique

Résumé
La thèse centrale de Duval, à l'égard des difficultés rencontrées par les élèves avec les démonstrations, est à l'effet que ceux-ci n'en saisissent pas facilement les exigences propres parce qu'ils les appréhendent et traitent comme des *argumentations*.
Poussant plus radicalement les orientations de recherche qu'il propose, j'ai conçu des tâches où l'élève organise les propositions d'une démonstration géométrique dont on lui a présenté les grandes lignes, dans les cases vides d'un schéma sagittal. La séquence de tâches a été expérimentée au printemps 2004 à Montréal dans trois classes de 1re secondaire (12-13 ans). Les premières analyses des données recueillies permettent entre autres de conclure que :

- le raisonnement déductif par enchaînement d'inférences n'est pas spontanément compris des élèves, ni dans sa structure locale, ni dans sa structure globale ;
- le passage de la compréhension de prime abord satisfaisante d'une preuve, des idées en cause, de leur articulation dans les grandes lignes, à la production écrite de cette preuve en un raisonnement logiquement bien contrôlé, constitue pour l'élève un saut fondamental, et est intimement lié à sa maîtrise de la structure déductive ;
- le travail d'organisation mis en oeuvre dans les tâches proposées peut contribuer à améliorer l'intelligence qu'a l'élève des mécanismes qui régissent cette structure.

1. Introduction

Le présent article rend compte d'une expérimentation menée à Montréal au printemps 2004, où des élèves de Secondaire 1 (12-13 ans) avaient à reconstituer la preuve que *la somme des mesures des angles intérieurs de tout triangle vaut 180°*. Les travaux de Duval ont servi de cadre théorique à la conception de la séquence de tâches expérimentée. Ce cadre théorique, incluant mes propres réflexions suscitées par les travaux de Duval, est exposé dans la section 2. La section 3 rend compte de la conception des trois tâches. La section 4 porte sur le déroulement de l'expérimentation en classe, ainsi que sur les premières observations qui en ont découlées. En section 5, je conclus avec un premier bilan et les extensions à envisager pour cette recherche. Par souci de transparence, l'auteur tient à prévenir le lecteur que le présent article, surtout dans sa seconde moitié, reprend tels quels certains extraits de Tanguay (2005a).

2. Cadre théorique

2.1. Le passage de l'argumentation à la démonstration

Le lecteur pourra consulter Duval (1991) ou Duval (1995, chap. V) pour une caractérisation détaillée de l'argumentation et de la démonstration, deux types de raisonnement que l'auteur cité tient pour radicalement distincts. Comme chez Balacheff (1987), les *démonstrations* mathématiques désignent pour Duval les preuves formelles, à savoir ces preuves qui établissent qu'un résultat est vrai en combinant déductivement — selon les règles de la logique propositionnelle — d'autres résultats déjà démontrés ou admis axiomatiquement. Grosso modo, Duval appelle *argumentation* tout discours par lequel on justifie une affirmation en cherchant à

modifier la conviction de l'interlocuteur, à travers des pratiques dialogiques relevant d'un emploi usuel de la langue naturelle. L'argumentation consiste en un ***discours***, dans lequel les propositions ne sont organisées que par cumul et interviennent essentiellement **pour leur contenu**. À l'inverse, la démonstration a la structure plus rigide d'un ***calcul***, dont l'organisation consiste en un enchaînement de *pas de déduction*, ou *inférences*. Dans chaque inférence, de structure ternaire, chaque proposition prend l'un parmi trois *statuts opératoires* possibles, à savoir : *proposition d'entrée* (ou *prémisse*), *règle d'inférence* et *proposition inférée*[1]. Le statut opératoire de chaque proposition est **indépendant de son contenu**, puisqu'une proposition peut changer de statut à l'intérieur d'une même démonstration. De fait, le plus souvent, la proposition inférée est « recyclée » comme proposition d'entrée de l'inférence ainsi *enchaînée* à la précédente.

La thèse centrale de Duval, à l'égard des difficultés qu'éprouvent les élèves avec la démonstration mathématique, est à l'effet que ceux-ci n'en comprennent ni spontanément, ni aisément les exigences propres, parce qu'ils appréhendent et traitent les démonstrations comme des argumentations. Outre la similitude linguistique des deux formes de raisonnement (cf. Duval, 1992-93), les causes suivantes pourraient être à l'origine de cette confusion. Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter les sections 2.3 et 3.1 ainsi que l'Annexe 1, dans Tanguay (2005a).

1. La structure locale ternaire de l'inférence n'est que rarement explicitée en démonstration :
   - soit que par souci de concision, à l'écrit aussi bien qu'à l'oral, l'on réduise les inférences aux canevas binaires des implications sous-jacentes, la règle d'inférence restant implicite ;
   - soit que pour alléger le texte écrit, on regroupe deux inférences en une seule, ou deux conditions d'application de la règle en une seule... ;
   - soit que le statut théorique de certaines règles d'inférence n'ait pas été clairement préétabli, comme c'est le cas par exemple dans bien de ces « preuves » du secondaire qui mobilisent la géométrie des transformations.
2. Même quand la structure de l'inférence est explicite, c'est ce que Duval (1995, p. 244) appelle *l'utilisation algorithmique de l'énoncé-tiers* — la vérification que les prémisses réunissent toutes les conditions d'application de la règle pour que se détache la proposition inférée — qui est relégué à l'implicite par les contraintes rédactionnelles. Le caractère opératoire des liens entre prémisses, énoncé-tiers et conclusion reste alors masqué pour l'élève. Celui-ci ne perçoit que des relations symétriques de proximité sémantique, entre des arguments retenus pour leur pertinence, leur vérité et leur communauté thématique.
3. La *structure globale* des démonstrations qui exigent plus d'un pas de déduction peut elle aussi rester inintelligible pour l'élève. D'abord parce que la compréhension d'une telle structure nécessite de sa part un travail, qu'il soit de lecture ou d'écriture, marqué de pauses, de retour sur les propositions déjà énoncées, de simultanéisations (pour rapprocher des propositions ou blocs de propositions logiquement inter-reliées mais non contigus dans le texte), de réaménagements ; toutes choses que ne permet pas la linéarisation de la pensée imposée par cette « pratique orale du texte » que décrit Duval (2001), faite de fluence, d'irréversibilité, de séquencialité. Ensuite, plus fondamentalement peut-être, parce que la structure globale repose

[1] On aura bien sûr reconnu dans ce « pas de déduction » le *modus ponens* des logiciens.

sur la variabilité du statut opératoire des propositions. Or, cette variabilité ne sera appréhendée par l'élève que s'il parvient à se décentrer suffisamment du contenu des propositions pour refouler la *valeur épistémique sémantique* — le degré de fiabilité alloué au contenu par l'interlocuteur au moment de l'énonciation : évident, certain, vraisemblable, possible, peu probable, impossible... ; cf. Duval, 1995, p. 222 — et ainsi donner pleinement son rôle à la *valeur épistémique théorique*, celle qui est associée aux statuts d'axiome, de définition, de conjecture, de théorème, d'hypothèse. Ce rôle est de discriminer celles parmi les propositions qui peuvent être utilisées comme prémisses, de celles qui peuvent l'être comme règles d'inférences ou comme propositions inférées.

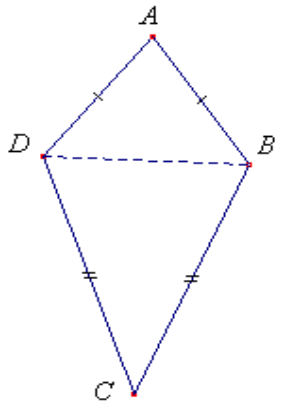
2.2. De la valeur épistémique d'évidence à la valeur logique de vérité

On a beaucoup eu tendance, dans la littérature, à prêter à la valeur épistémique d'évidence cet effet d'obstacle à l'appréhension de la structure déductive ; tout particulièrement en géométrie, où « l'évidence » prend appui sur « le perceptif » et où l'élève doit constamment lutter contre le désormais consacré « ça se voit sur le dessin », pour discriminer ce qu'il est autorisé à tenir pour acquis de ce qu'il doit démontrer. Mais qu'en est-il de ces nombreux élèves et étudiants plus avancés, qui ont bien assimilé l'interdit du recours à l'empirisme en démonstration, mais ne semblent pas pour autant plus aptes à rencontrer les exigences de celle-ci ? Mes réflexions, suscitées par les travaux de Duval et par leurs résonances dans ma propre expérience d'enseignement, m'amènent à analyser le problème sous l'angle suivant : la difficulté pour l'élève à refouler la valeur épistémique d'évidence aussitôt surmontée, se dresse alors un obstacle plus subtil, que dans Tanguay (2005a, § 3.1), j'ai identifié comme celui de la *prégnance de la valeur de vérité*. Je m'explique. Imaginons par exemple un élève de 14 ou 15 ans, à qui l'on soumet la preuve ci-dessous, que *tout cerf-volant a une paire d'angles opposés congrus*.

$$\begin{aligned}
\overline{AD} \cong \overline{AB} \quad &\Rightarrow \quad \Delta ABD \text{ est isocèle} \\
&\Rightarrow \quad \angle ADB \cong \angle ABD, \\
\overline{CD} \cong \overline{BC} \quad &\Rightarrow \quad \Delta BCD \text{ est isocèle} \\
&\Rightarrow \quad \angle CDB \cong \angle CBD,
\end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned}
\mathrm{m}\angle D &= \mathrm{m}\angle ADB + \mathrm{m}\angle CDB \\
&= \mathrm{m}\angle ABD + \mathrm{m}\angle CBD \\
&= \mathrm{m}\angle B.
\end{aligned}$$



La structure locale et globale de la preuve repose essentiellement sur le fait que dans ΔABD et ΔBCD, la congruence des côtés *précède* la congruence des angles à leur base. Pour comprendre cette démonstration, l'élève doit être en mesure de relativiser la valeur de vérité de l'énoncé « ΔABD est isocèle », avec tout ce qui vient avec et sur quoi il a travaillé en classe : congruences des côtés et des angles, présence d'un axe de symétrie, etc. L'élève doit comprendre qu'au moment où la première implication est énoncée, la congruence des côtés est ***déjà vraie*** quand la congruence

des angles n'est ***pas encore vraie***. Voilà qui est étrange pour lui : les énoncés « ΔABD est isocèle » et « ΔABD est isoangle », qui dans son entendement forment bloc, n'auraient pas hiérarchiquement le même statut. Est-ce que ça ne va pas à l'encontre même de l'équivalence logique *isocèle si et seulement si isoangle*, apprise et démontrée en classe peu auparavant ?

Ne s'est-il pas convaincu, avec les années, comme ses enseignants ne se sont jamais fait faute de lui rappeler, que la mathématique est par excellence la science où les énoncés sont sans ambivalence soit vrais, soit faux ? Ses enseignants n'ont-ils pas insisté sur ce point, souvent même *à l'encontre* de ses propres conceptions spontanées : « les nombres premiers sont impairs » est un énoncé faux car… (Zazkis et Levy, 2001) ; « les carrés sont des rectangles » est un énoncé vrai car… (Furinghetti et Paola, 1991) ? Les enseignants ont prévenu l'élève des pièges de l'empirisme et de l'évidence en géométrie. Mais du moment que le manuel ou l'enseignant affirme, en *argumentant* cette affirmation, que ΔABD est isocèle, comment « l'iso-angularité-latéralité » du triangle saurait-elle n'être tout à coup qu'**à moitié vraie** ?!!

Autrement dit, quand l'élève a atteint ce stade où il est capable de remettre en question l'évidence perceptive suggérée par la figure, où en « bon élève », il refoule la valeur épistémique sémantique qu'il prête spontanément à l'énoncé, c'est alors pour laisser toute la place à la valeur de vérité et augmenter d'autant son poids d'entrave au raisonnement[2]. Après tout, quand on fait intervenir un *argument*, l'important est de savoir si l'affirmation à sa base est vraie ou non. Cette prégnance de la valeur de vérité durera aussi longtemps que l'élève n'aura pas conscience de cette autre valeur épistémique qu'est la valeur théorique, et n'aura pas « … découvert une organisation du raisonnement centrée sur le seul statut des propositions » (Duval, 1995, p. 231).

2.3. Intuition et démonstration

Pour Fischbein (1982), l'intuition (intellectuelle) a la même fonction au niveau symbolique qu'a la perception au niveau concret : donner accès à une forme de cognition qui soit directe, globale et immédiatement disponible. C'est là selon lui qu'on se heurte à ce qu'il appelle le *paradoxe fondamental de l'apprentissage de la preuve* :

> *Le concept de preuve formelle (non inductive, non intuitive, non empirique) ne peut devenir un instrument efficace pour les processus de raisonnement que si, et seulement si, il acquiert les qualités requises par le comportement empirique d'adaptation !*
> *Autrement dit : les voies formelles de raisonnement et de preuve peuvent se libérer des contraintes du savoir empirique si elles atteignent ces qualités qui confèrent à la recherche empirique sa productivité spécifique ; à savoir ces formes globales, synthétiques, intuitives d'anticipation et d'interprétation* (op. cit., p. 17, ma traduction).[3]

---

[2] Je donne un exemple de ce qui pourrait être une manifestation de cet obstacle dans Tanguay (2005b), § 3.3.

[3] *The concept of formal, noninductive, nonintuitive, non-empirical proof can become an effective instrument for the reasoning process if, and only if, it gets itself the qualities required by adaptive behavior!*
In other terms: formal ways of thinking and proving can liberate themselves from the constraints of empirical knowledge if they become able to include in themselves those qualities which confer on the empirical search its specific productivity. We refer to the global, synthetic, intuitive forms of guessing and interpreting.

Plus qu'un paradoxe, nous faisons face ici selon moi à un véritable cercle vicieux. Pour être opératoires (au sens de Fischbein), les mécanismes logiques de la démonstration doivent accéder, dans l'entendement de l'élève ou de l'étudiant, à une forme de cognition directe, globale, efficace, immédiatement disponible, caractéristique de la connaissance intuitive. Mais une telle forme de cognition ne sera viable que si elle embrasse des schèmes relativement stables, invariables, comme le sont les règles et contraintes qui régissent l'organisation déductive. L'argumentation, au contraire, revêt autant de formes qu'il y a de contextes et de contenus, issus de la combinaison des propositions en cause : « … l'argumentation a pour caractéristique essentielle de n'avoir pour contraintes d'organisation que celles inhérentes à toute pratique spontanée du discours » (Duval, 1995, p. 213). Ainsi, tant que l'élève aborde la preuve à travers des schèmes argumentatifs de raisonnement, ne peut-il intégrer la démonstration en une « … forme structurale interne de nécessité qui est caractéristique d'une adhésion intuitive » (Fischbein, 1982, p. 15)[4]. Et tant qu'il n'est pas parvenu à une telle adhésion intuitive se verra-t-il condamné à aborder la preuve à travers des schèmes argumentatifs de raisonnement.

3. Conception des tâches

3.1. Hypothèses de recherche

Comment amener l'élève à avoir, de ce que Duval et Egret (1989) appellent *la structure profonde* de la démonstration, une compréhension *opératoire*, au sens de Fischbein ? Des orientations de recherche que Duval et Egret proposent, pour les raisons qu'ils ont données, j'ai retenu :

- la dissociation des tâches heuristiques d'avec les tâches d'organisation déductive ;
- l'interaction d'une représentation non discursive, par graphes orientés (ou schémas sagittaux), de la démonstration à travailler, avec un traitement rédactionnel de celle-ci.

Par ailleurs, Duval insiste sur la nécessité de laisser à l'élève la tâche de construction du graphe, pour qu'il découvre par lui-même qu'elle « … se fait et se contrôle uniquement en prenant en compte le statut opératoire des propositions » (2001, p. 201). Se décentrer du contenu pour prendre en compte le statut opératoire : en quoi consiste au fait un tel changement de position ? Balacheff (1987) parle du passage des *preuves pragmatiques* aux *preuves intellectuelles*, de l'adhésion de l'élève-étudiant à une *position théorique*, au centre de laquelle celui-ci mettra la connaissance plutôt que les conséquences de l'action, et où prévaudra la simple satisfaction intellectuelle sur la nécessité de *convaincre l'autre*. Toujours pour caractériser cette évolution des processus de preuves dans le sens d'une mathématisation accrue, Rouche (1989, p. 32) écrit : « Des notions comme celles de vérité, de doute et d'évidence sont transformées par le déplacement de l'attention de la thèse vers l'implication. » Nous approchons ici du cœur même de ce qui constitue ce *changement de position* attendu des élèves, où il y a lieu selon moi de distinguer deux « temps » complémentaires.

- L'élève doit comprendre qu'en démonstration, ce ne sont plus les énoncés qu'on valide mais le raisonnement lui-même ; ou différemment dit, qu'il ne s'agit plus pour lui de

[4] (…) *an internal structural form of necessity which is characteristic of an intuitive acceptance.*

produire des énoncés vrais mais des pas de raisonnement valides[5], validité éprouvée du point de vue calculatoire de la logique propositionnelle.

- L'élève doit comprendre en quoi cette *re-focalisation*, de la vérité des contenus vers la validité des pas de déduction, permet d'engendrer un raisonnement propre à convaincre de la vérité de l'énoncé-cible.

Duval (1995, p. 231) soutient à juste titre qu'en contexte théorique, « ... la certitude intrinsèque à la découverte de la nécessité d'une proposition fonde celle de sa vérité et non l'inverse. » Mais tout le problème est là : pour que la preuve intellectuelle — la démonstration — soit reconnue par l'élève comme moyen de conviction, il lui faut adhérer à cette *position théorique* et saisir quelles en sont les règles. Il y a le but du jeu (la vérité de l'énoncé-cible) et il y a ses règles (la validité des pas de raisonnement). En passant de l'argumentation à la démonstration, ce sont les voies d'accès au but qui changent. Je pose que l'élève ne peut souscrire à cette nouvelle façon d'atteindre le but du jeu avant d'en avoir minimalement compris les (nouvelles) règles. Un peu dans l'esprit d'une partie à l'essai, j'envisage donc une série de tâches d'amorce, où les élèves travaillent sur des graphes *déjà construits*. Mes hypothèses sont les suivantes :

a) L'apprentissage de la démonstration est un processus de longue haleine, qui doit débuter tôt. Sans nécessairement en faire un objet d'enseignement magistral, il faut chercher à faire comprendre aux élèves aussitôt que possible les *règles du jeu*.

b) Il faut briser ces cercles vicieux qui tiennent l'élève captif :
   - celui du rapport de la démonstration à l'intuition (cf. § 2.3) ;
   - celui de la prise de conscience de la valeur épistémique théorique et du statut opératoire variable des propositions : comment la faire naître si l'élève n'arrive pas à se décentrer des contenus et valeurs de vérité (cf. § 2.2) ?
   - celui de l'appréhension de la structure *hiérarchisée*, globalement et localement, de la démonstration (au sens où par exemple, dans la preuve traitée en section 2.2, la congruence des côtés du triangle vient *avant* la congruence des angles à sa base) ; comment la saisir quand elle n'est perçue que comme un cumul d'arguments symétriquement inter-reliés ? Quels choix peut faire l'élève, dans sa construction d'un graphe propositionnel, s'il n'a pas compris comment doit en être la structure ?

   Je fais le pari qu'on peut faire travailler les élèves sur des graphes déjà construits, avec des propositions et des règles d'inférence déjà énoncées, en cherchant autant que possible à *isoler les difficultés*.

c) J'avance pour finir l'hypothèse qu'un travail (sur l'organisation des propositions dans le graphe) fait *en équipes*, avec ce que cela suppose comme échanges argumentatifs, favorisera une *adhésion intuitive* aux mécanismes logiques de la démonstration, dans la mesure où ceux-ci émergeront tant soit peu des délibérations entre coéquipiers.

3.2. La séquence de tâches

Pour aller dans le sens de la tradition scolaire et des programmes, j'ai opté pour un travail de la démonstration en *géométrie plane.* Pour les raisons exposées au point a) ci-dessus, j'ai décidé de

[5] À cet égard, la preuve par l'absurde apparaîtra comme l'illustration paradigmatique de ce changement de position.

concevoir et soumettre une première séquence de tâches à des élèves de Secondaire 1 (12-13 ans). Le modèle de la tâche a ensuite été arrêté : elle consiste à organiser une « preuve » dont on a d'abord exposé les grandes lignes lors d'une discussion de classe dirigée par l'enseignant, pendant laquelle est introduite la figure d'accompagnement. Par équipes de trois ou quatre, les élèves doivent ensuite placer des énoncés (écrits sur petits cartons rectangulaires, donnés pêle-mêle) dans les cases vides d'un schéma sagittal, sur grand carton, où seul l'énoncé-cible est déjà inscrit. De façon à bien marquer à la fois le statut particulier des justifications (les règles d'inférence) et la structure ternaire de l'inférence, celles-ci sont énoncées et numérotées sur une feuille à part. Les élèves disposent de trois ou quatre de chaque numéro, sur pastilles. Ces numéros doivent être placés dans les bulles attachées aux flèches-inférences : voir annexes 1, 3, 4 et 5. Après le travail sur le graphe, les élèves doivent individuellement rédiger un message (« dans leurs propres mots ») pour convaincre l'élève Thomas (« qui ne croit jamais ce que ses professeurs lui disent ») de la vérité (« hors de tout doute raisonnable ») de l'énoncé-cible.

Compte tenu du niveau scolaire visé et des programmes, le choix du résultat-cible s'est porté sur le théorème de la somme des mesures des angles intérieurs du triangle. Plusieurs preuves en ont été envisagées, notamment une adaptation du raisonnement exposé dans Hanna et Jahnke (1993, p. 436). Pour les raisons exposées dans Tanguay (2005a, § 4.2), après discussions avec les enseignants collaborateurs, nous avons retenu la preuve standard, qui consiste à tracer la parallèle à *AB* passant par *C* (*A*, *B*, *C* les sommets du triangle), et à invoquer la congruence des angles alternes-internes ainsi formés. Il se trouve que le programme du Ministère de l'Éducation du Québec (MEQ, 1993) ne prévoit l'étude des angles correspondants et alternes-internes qu'en 4e secondaire. Nous avons alors pris la décision d'incorporer la démonstration de la congruence des alternes-internes à l'activité. Les enseignants ont accepté d'insérer dans leur planification trois tâches d'une période[6] chacune, chaque tâche consistant à reconstituer les schémas donnés respectivement aux annexes 3, 4 et 5. L'idée générale de la preuve, pour les tâches 1 et 3, fait l'objet d'une discussion de la classe avec l'enseignant, où celui-ci amène les élèves à constater que les angles opposés par le sommet ont un supplémentaire commun dans le cas de la tâche 1, et à repérer les angles alternes-internes congrus aux angles à la base du triangle donné, dans la tâche 3. La tâche 2, beaucoup plus facile, n'est pas précédée d'une recherche interactive des grandes lignes de la preuve, mais il faut par ailleurs consacrer une demi-heure à définir *angles correspondants*, *angles alternes-internes*, et à expliquer pourquoi la congruence des angles correspondants sera tenue pour acquise.

Réajusté puis approuvé par les enseignants-collaborateurs, le choix des règles d'inférence est arrêté en ajustant deux variables dont les effets opposés sont d'obtenir :

- des démonstrations où même les pas en apparence anodins sont rendus explicites ;
- des schémas de complexité raisonnable.

Ce choix est imposé *ex cathedra* aux élèves, mais on peut penser que si des activités analogues étaient planifiées sur une base régulière, à plus long terme, il pourrait faire l'objet d'un travail de toute la classe. La liste des justifications est distribuée sur feuille volante : voir l'Annexe 1.

[6] Une période au secondaire dure de 55 à 75 minutes. Il s'agissait ici de périodes de 75 minutes.

4. L'expérimentation

4.1. Le contexte

Elle a été menée auprès de trois classes de Secondaire 1 (12-13 ans) à Montréal, aux mois de mars, avril et mai 2004. Les élèves n'avaient jusqu'alors été introduits à la preuve en mathématiques que sous la forme des justifications et explications informelles usuellement données au primaire. La première tâche était précédée d'une introduction, où l'on expliquait aux élèves qu'ils auraient à reconstituer une « vraie preuve mathématique », faite d'une série de déductions, « comme dans une enquête de Sherlock Holmes ou de Colombo. » Un exemple de *déduction* était représenté au tableau sous forme schématique (avec la « bulle » de justification), puis discuté. Les séances, neuf en tout, ont été filmées par un assistant de recherche. Compte tenu d'un important bruit ambiant, nous avons décidé de suivre une seule équipe à la caméra-vidéo, branchée à un micro de table. Les discussions d'une autre équipe ont été enregistrées avec magnétophone et micro de table. Les grands cartons ont été photographiés à intervalles (plus ou moins) réguliers. Le chercheur et les enseignants collaborateurs ont pris des notes. À cela s'ajoutent les preuves « pour convaincre Thomas », rédigées par les élèves. L'analyse de cet ensemble de données n'étant pas complétée, je ne rendrai compte ici que de ses conclusions les plus immédiates.

4.2. La réussite

Pour la première tâche, vingt-deux équipes sur vingt-quatre ont réussi une reconstitution du schéma, dans quelques cas à une règle d'inférence fautive près. Le temps de réussite a varié entre 30 et 55 minutes (l'introduction demande de 15 à 20 minutes). Une équipe a réussi le schéma à l'inversion de deux propositions près. Une équipe a tourné en rond pendant toute la période.

Le second schéma déductif a été réussi par toutes les équipes en 5 à 15 minutes. Avec les explications préalables sur les angles alternes-internes et la rédaction du message pour Thomas, les élèves ont été occupés pour tout juste une heure. Il est clair que la facilité avec laquelle ils se sont acquittés de la tâche les a confortés dans leur capacité à réussir la troisième tâche.

Dans des temps variant entre 30 et 65 minutes, les dix-neuf équipes (trois sur l'heure du midi et seize en cours)[7] ont réussi la reconstitution du troisième schéma, mais avec de l'aide à divers degrés. D'abord, le numéro 9 est systématiquement placé dans la dernière bulle par l'animateur après une vingtaine de minutes. Dans deux des classes, on a dû revenir pour expliquer, exemple à l'appui, la règle 9 (des élèves ne comprenaient pas le mot *substitution*). Avec quatre à cinq équipes qui disaient n'arriver à rien, le chercheur ou l'enseignant ont repris l'idée générale de la preuve : « essayez de traduire cette idée avec les propositions que vous avez… ». En montrant ensuite certains éléments de la preuve correctement établis dans leur schéma et en discutant de leurs articulations possibles avec l'idée générale de la preuve, ces équipes ont fini par débloquer.

4.3. Autres éléments à relever

Dès la deuxième tâche, les élèves se sont rapidement mis au travail, sachant très bien ce qu'ils avaient à faire. Ils semblent avoir apprécié les tâches.

---

[7] Dans une des classes, des contraintes d'horaire nous ont forcé à faire l'activité sur l'heure du midi, avec trois équipes de volontaires.

- *Contrôle possible par les élèves.* Ceux-ci semblent en effet en mesure de valider par eux-mêmes leur schéma. L'erreur la plus fréquente, celle du « raccourci déductif », qui consiste à faire une seule déduction avec ce qui aurait dû en être deux ou trois,

  > *Exemple, première tâche :* de ce que $\angle MOQ$ et $\angle QON$ sont adjacents, par la règle 1, les élèves déduisent que $m\angle MOQ + m\angle QON = 180°$.

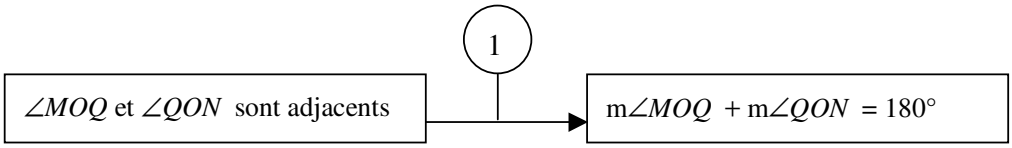
  finit pratiquement toujours par être corrigée, parce que les élèves restent alors pris avec des énoncés qu'ils ne savent plus où placer, et reconsidèrent l'organisation des propositions. Ce qui ne veut pas dire qu'ils ont à chaque fois identifié précisément ce qui n'allait pas avant : nous y reviendrons. S'il leur arrive de demander au chercheur ou à l'enseignant de vérifier un schéma fautif, leur manque de conviction est très net à chaque fois ; par exemple, dans un des enregistrements : « On pense qu'on a fini mais on pense que ça ne marche pas ». Nos interventions ont alors consisté à montrer du doigt deux « déductions », une bonne, une mauvaise, en demandant pour chacune : « Essayez de m'expliquer dans vos mots comment fonctionne cette déduction. » L'invalidité de la déduction fait alors rapidement consensus. À l'inverse, les élèves savent quand le schéma est réussi et leur conviction que tel est le cas se manifeste alors clairement.
- *Les stratégies.* Quelques équipes, les plus efficaces, ont cherché à travailler davantage « à reculons » (à partir de l'énoncé-cible), mais pas systématiquement. Les schémas se construisent par zones, par fragments qu'on cherche ensuite à connecter. Le travail local se fait selon des considérations géométriques, logiques, symboliques (« On met tous les *MOQ* et les *POM* de ce côté-là, et les autres là »), des recherches de symétrie, en un mélange difficile à dissocier. Les équipes les plus inefficaces sont celles qui ne prennent en compte les justifications qu'après coup. Il apparaît clairement que la traduction de la preuve en un enchaînement de déductions ne se fait que très laborieusement, de façon non systématique et mal contrôlée ; et que *même quand la preuve est bien saisie dans ses grandes lignes, l'utilisation de ce canevas comme guide pour l'organisation déductive ne va absolument pas de soi.* Un élève qui, de façon convaincante, a su synthétiser la 3e preuve devant ses coéquipiers, s'exclamera : « Mais je ne sais pas comment l'expliquer avec ce tableau là ». Et l'autre de renchérir : « On comprend mais pas avec le tableau ». La traduction inverse, du schéma à la preuve écrite, ne va pas de soi elle non plus : voir le point ci-dessous.
- *Preuves écrites.* Les messages écrits dans le cadre de la deuxième tâche, en général bien rédigés, portent sur une démonstration trop facile pour donner des informations significatives. Par manque de temps, les messages « pour Thomas » des première et dernière tâches ont été laissés à faire à la maison. Je présente aux annexes 6, 7 et 8 trois parmi ceux, peu nombreux, que j'ai pu récupérer (voir la discussion § 5.1). Dans un des groupes, plus rapide, la consigne pour la troisième tâche ayant donné lieu à un malentendu entre le chercheur et l'enseignante, les élèves ont rédigé un message par équipe, et ont pu remettre le message pour Thomas à la fin de la période. Deux équipes ont cependant débordé de cinq à dix minutes, pour fignoler. Sur les huit messages ainsi obtenus, trois cherchent à suivre le schéma en reprenant les énoncés, mais montrent à divers degrés une maîtrise imparfaite de l'organisation déductive. Un message suit de près le schéma en montrant cette fois une bonne maîtrise de l'organisation déductive. Chez les quatre autres des huit équipes, on a cherché à se réapproprier la

démonstration. Les textes produits présentent à chaque fois une version simplifiée du raisonnement, mais montrent par ailleurs une bonne maîtrise de celui-ci. Le lecteur intéressé pourra consulter quatre de ces huit productions dans Tanguay (2005a).

5. Conclusion

5.1. Retour sur les hypothèses

Qu'ont compris les élèves des règles du jeu de la démonstration géométrique à travers ces tâches ? Ont-ils saisi : ce qu'est une inférence ? l'unicité et nécessité de la proposition inférée quand les prémisses satisfont aux conditions de la règle ? Pour Duval (1995, p. 312), « ... le point décisif dans un apprentissage de la démonstration est la découverte d'un pas de raisonnement valide dont la validité puisse être éprouvée par l'élève lui-même sans aucun recours à un contrôle externe (accord d'un interlocuteur, consensus d'une communauté, conformité à un schéma logique…) » Dans la mesure où la reconstruction du graphe ne s'est pas faite uniquement selon des critères logiques et géométriques, où l'adéquation entre l'organisation déductive et ce que les élèves comprennent du raisonnement reste difficile, où des élèves n'arrivent à se décentrer de l'évidence géométrique m$\angle MON$ = 180°, pour corriger l'inférence fautive



qu'avec le secours externe de la conformité au schéma (voir l'exemple, § 4.3), on peut se demander ce qui restera aux élèves, du point de vue de leur apprentissage de la démonstration. Comme mentionné en § 3.1, Duval (2001, p. 201) insiste sur la nécessité de faire construire le graphe par l'élève. J'affirme pour ma part que le travail sur un graphe déjà construit peut contribuer à jeter les bases de l'apprentissage escompté. Devant ses coéquipiers qui permutaient sans cesse les énoncés « AB et PQ sont parallèles », « AC est une sécante pour les droites AB et PQ » et « m$\angle ABC$ = m$\angle BCQ$ » dans trois des cases du troisième schéma, une élève défendra la solution valable en s'exclamant :

> *NON ! C'est à cause d'une sécante qui traverse une parallèle ! C'est à cause qu'il y a deux parallèles coupées par une sécante qu'ils sont alternes-internes et c'est à cause qu'ils sont alternes-internes qu'ils sont égaux !*

Aux coéquipiers qui ne s'entendent pas dans une autre équipe, un étudiant à la maîtrise, laissant momentanément la caméra, explique que chaque déduction doit en principe pouvoir être analysée et validée indépendamment des autres. Il a pu assister par la suite à un déblocage rapide et significatif du travail de l'équipe.

Un des relecteurs s'est interrogé sur la possibilité que de telles activités puissent faire accéder l'élève à son « Miracle Grec » (selon le mot de Georges Glaeser), provoqué par la découverte personnelle d'au moins une démonstration. Une telle découverte est ressentie comme « miracle » précisément selon moi quand elle s'accompagne de ce changement de position, discuté en § 3.1,

changement à travers lequel l'élève prend conscience des possibilités qu'ouvre à lui la maîtrise du pur raisonnement. Duval relève que dans le texte de démonstration alors rédigé par l'élève, cette prise de conscience se traduit par l'apparition d'*attitudes propositionnelles* (Duval, 1991, p. 252) et de *formes jubilatoires d'expression* (Duval, 2001, p. 201). Les annexes 6 et 7 reproduisent deux « messages pour Thomas » où deux élèves, dans leur effort à se réapproprier les preuves 1 et 3, respectivement[8], montrent non seulement leur maîtrise du raisonnement, mais aussi nettement la conscience qu'ils ont de cette maîtrise. Le « C'est assez simple… » du message de l'annexe 6 tient clairement de l'attitude propositionnelle. Une telle maîtrise est aussi manifeste dans les 2e, 3e et 4e productions d'élèves de Tanguay (2005a). Rappelons que nous avons affaire à des élèves de 12 et 13 ans, qui en sont à leurs premières armes en démonstration ! La production de l'annexe 8, plus sobre, par son utilisation à chaque fois pointue et pertinente du *donc* et du *parce que*, révèle quant à elle une bonne intelligence du rôle que jouent les règles d'inférence ; sauf peut-être pour la règle de substitution, qui a été de loin la plus problématique pour les élèves, dans le passage du schématique au discursif.

Les autres points relevés en § 4.3, sans être concluants eu égard aux hypothèses a) et b), § 3.1, montrent tout de même que le type d'activités proposé permet effectivement d'isoler les difficultés et de concentrer l'attention des élèves sur certains des mécanismes fins de l'organisation déductive. Le travail en équipes a-t-il favorisé ou défavorisé l'adhésion intuitive à ces mécanismes (cf. § 3.1 c) ? Les élèves sauront-ils adapter le mode de travail non linéaire (cf. § 2.1, point 3) qui a été le leur pendant l'activité, à un travail individuel plus standard de recherche et de rédaction d'une preuve ? Il est trop tôt à mon avis pour statuer sur ces questions.

5.2. Extensions anticipées

Pour être mieux fixé, de même que pour mieux étayer les affirmations à travers lesquelles j'ai cherché à confirmer les hypothèses, il faudra expérimenter à plus long terme. *Je n'affirme surtout pas* que tout travail de démonstration en géométrie devrait faire l'objet de telles activités. Je réitère que telles que présentées ici, elles sont conçues comme des amorces, destinées à déclencher une meilleure compréhension des règles du jeu de la démonstration. J'envisage ensuite qu'on fasse évoluer ce type d'activités, en y déléguant de plus en plus d'éléments de la tâche comme l'élaboration de la figure, l'énonciation des propositions, le choix des règles et la construction du graphe. Il s'agirait alors de les intercaler dans des planifications comme celles que proposent Gaud et Guichard (1984), Pluvinage (1989) ou Arsac et al. (1992), en complémentarité avec des activités de découverte, de recherche de conjecture, de validation inductive, de construction, etc. Il s'agirait également d'en mieux contrôler les phases d'institutionnalisation[9]. Chaque stade de l'évolution de telles activités devra lui aussi être conçu comme « objet transitionnel » (Duval & Egret, 1989, p. 35), afin que cette progression débouche ultimement sur un travail standard de recherche et rédaction des démonstrations.

---

[8] Le message de l'annexe 7 propose de fait un raisonnement distinct pour la 3e preuve schématisée.

[9] Pratiquement absentes de la présente expérimentation à cause des contraintes de temps, les phases d'institutionnalisation constitueraient ces moments privilégiés où, sur la base du travail accompli dans les activités, l'on ferait le point en classe sur les fondements de la démonstration.

5.3. Un premier bilan

Comme premier bilan, j'avance que l'expérimentation met en évidence la justesse de certains des diagnostics de Duval :

- le raisonnement déductif par enchaînement d'inférences n'est pas spontanément compris des élèves, ni dans sa structure locale, ni dans sa structure globale ;
- la nécessaire décentration par rapport aux contenus, à la valeur épistémique d'évidence ou à la valeur logique de vérité, ne va pas du tout de soi pour l'élève, et il s'agit pour lui de quelque chose de beaucoup plus complexe et profond que de se conformer aux consignes « tu n'as pas le droit de te fier à la figure » ou « tu dois justifier chacune de tes affirmations » ;
- comme le relève également Dreyfus (1999), le passage de la compréhension de prime abord satisfaisante d'une preuve, des idées en cause, de leur articulation dans les grandes lignes, à la production écrite de cette preuve en un raisonnement logiquement bien contrôlé, constitue pour l'élève un saut fondamental, dont la difficulté tient à beaucoup plus qu'à sa *maladresse à rédiger*, et est intimement lié à sa maîtrise de la structure déductive ;
- le travail d'organisation mis en oeuvre dans les tâches proposées peut contribuer à améliorer l'intelligence qu'a l'élève des mécanismes qui régissent cette structure.

RÉFÉRENCES

Arsac, G., Chapiron, G., Colonna, A., Germain, G., Guichard, Y. & Mante, M. 1992. *Initiation au raisonnement déductif au collège*. Presses Universitaires de Lyon.

Balacheff, N. 1987. *Processus de preuve et situations de validation.* Educational Studies in Mathematics, Vol. 18, n°2, mai 87, p. 147-176.

Dreyfus, T. 1999. *Why Johnny can't prove.* Educational Studies in Mathematics, n°38, p. 85-109.

Duval, R. 1991. *Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration.* Educational studies in Mathematics, vol. 22, p. 233-261.

Duval, R. 1992-93. *Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive ?* Petit x, n°31, p. 37-61.

Duval, R. 1995. *Sémiosis et pensée humaine*. Éditions Peter Lang, coll. Exploration, recherches en sciences de l'éducation. Berne, Suisse.

Duval, R. 2001. *Écriture et compréhension : Pourquoi faire écrire des textes de démonstration par les élèves ?* In Produire et lire des textes de démonstration. Collectif coord. par É Barbin, R. Duval, I. Giorgiutti, J. Houdebine, C. Laborde. Ellipses. Paris.

Duval, R. & Egret, M. A. 1989. *L'organisation déductive du discours.* Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. N°2, p. 25-40. IREM de Strasbourg.

Fischbein, E. 1982. *Intuition and Proof. For the Learning of Mathematics,* Vol. 3, n°2 (novembre), p. 9-19.

Furinghetti, F. & Paola, D. 1991. *On some obstacle in understanding mathematical texts.* In Proceedings of the XVth PME Conference, Vol. 2, p. 57-63. Assise, Italie.

Gaud, D. & Guichard, J. P. 1989. *Apprentissage de la démonstration.* Petit x, n°4, p. 5-25.

Hanna, G. & Jahnke, H. N. 1993. *Proof and Application.* Educational Studies in Mathematics, N° 24, p. 421-438.

MEQ. 1993. *Programme d'Études, Secondaire 1, Mathématique 116.* Direction de la formation générale des jeunes, Ministère de l'Éducation du Québec. Québec.

Pluvinage, F. 1989. *Aspects multidimensionnels du raisonnement en géométrie.* Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. N°2, p. 5-24. IREM de Strasbourg.

Rouche, N. 1989. *Prouver : amener à l'évidence ou contrôler des implications ?* Dans La démonstration mathématique dans l'histoire. Colloque Inter-Irem *Épistémologie et histoire des mathématiques*, pp. 8-38. Besançon, France.

Tanguay, D. 2005a. *Apprentissage de la démonstration et graphes orientés.* Annales de didactique et de sciences cognitives (IREM de Strasbourg), à paraître dans le volume 10. 33 pages.

Tanguay, D. 2005b. *La complexité du raisonnement déductif en géométrie*. À paraître dans les Actes du Colloque 2004 du Groupe des didacticiens des mathématiques du Québec (GDM).

Zazkis, R. & Levy, B.-S. 2001. *Truth Value of Mathematical Statements : Can Fuzzy Logic Illustrate Students' Decision Making ?* Focus on Learning in Mathematics, Vol. 23, n°4, p. 1-26.

ANNEXE 1

Liste des justifications (ou règles d'inférence) …

… pour les tâches décrites à la section 3.2 (voir également annexes 3, 4 et 5). Pour la première tâche, seules les quatre premières règles étaient données.

① La mesure d'un angle résultant de la juxtaposition de deux ou plusieurs angles adjacents, égale la somme des mesures de ces angles.
② Tout angle plat mesure 180°.
③ Propriété de l'égalité : si ◙ = ☼ et ☼ = Θ, alors ◙ = Θ.
④ Simplification dans une égalité : si ☺ + ◘ = ☺ + ♀, alors ◘ = ♀.
⑤ Les angles opposés par le sommet ont même mesure.
⑥ Les angles correspondants, déterminés par deux droites parallèles coupées par une sécante, ont même mesure.
⑦ Les angles alternes-internes, déterminés par deux parallèles coupées par une sécante, ont même mesure.
⑧ Par un point à l'extérieur d'une droite passe une unique parallèle à cette droite.
⑨ Substitution : si deux quantités sont égales, on peut substituer l'une par l'autre dans n'importe quelle égalité.

ANNEXE 2

Les figures d'accompagnement pour chaque tâche

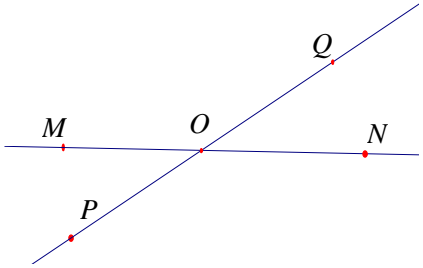


Figure pour la 1re tâche

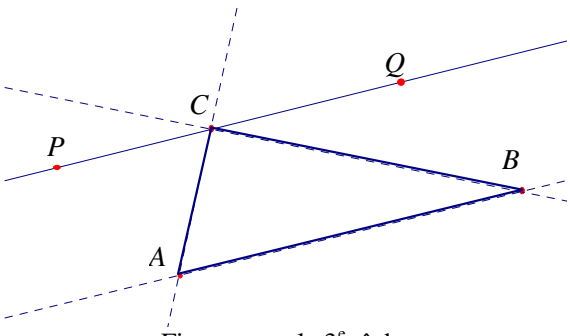


Figure pour la 3e tâche

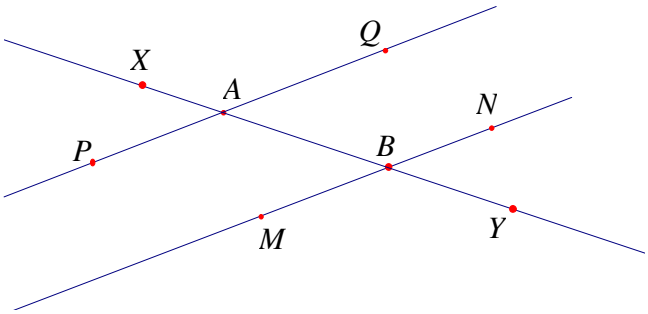
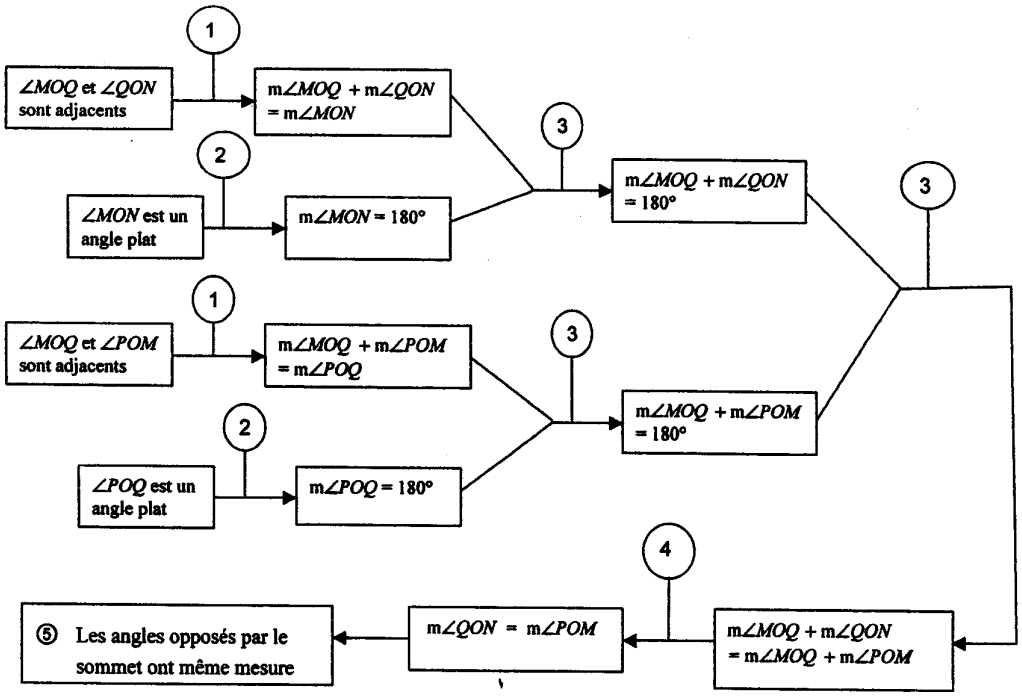


Figure pour la 2e tâche

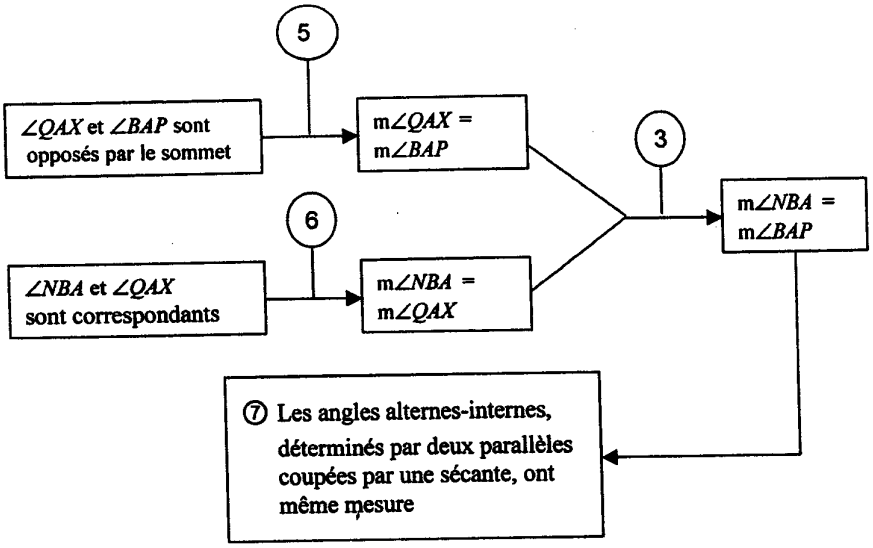
ANNEXE 3

Solution pour la première tâche



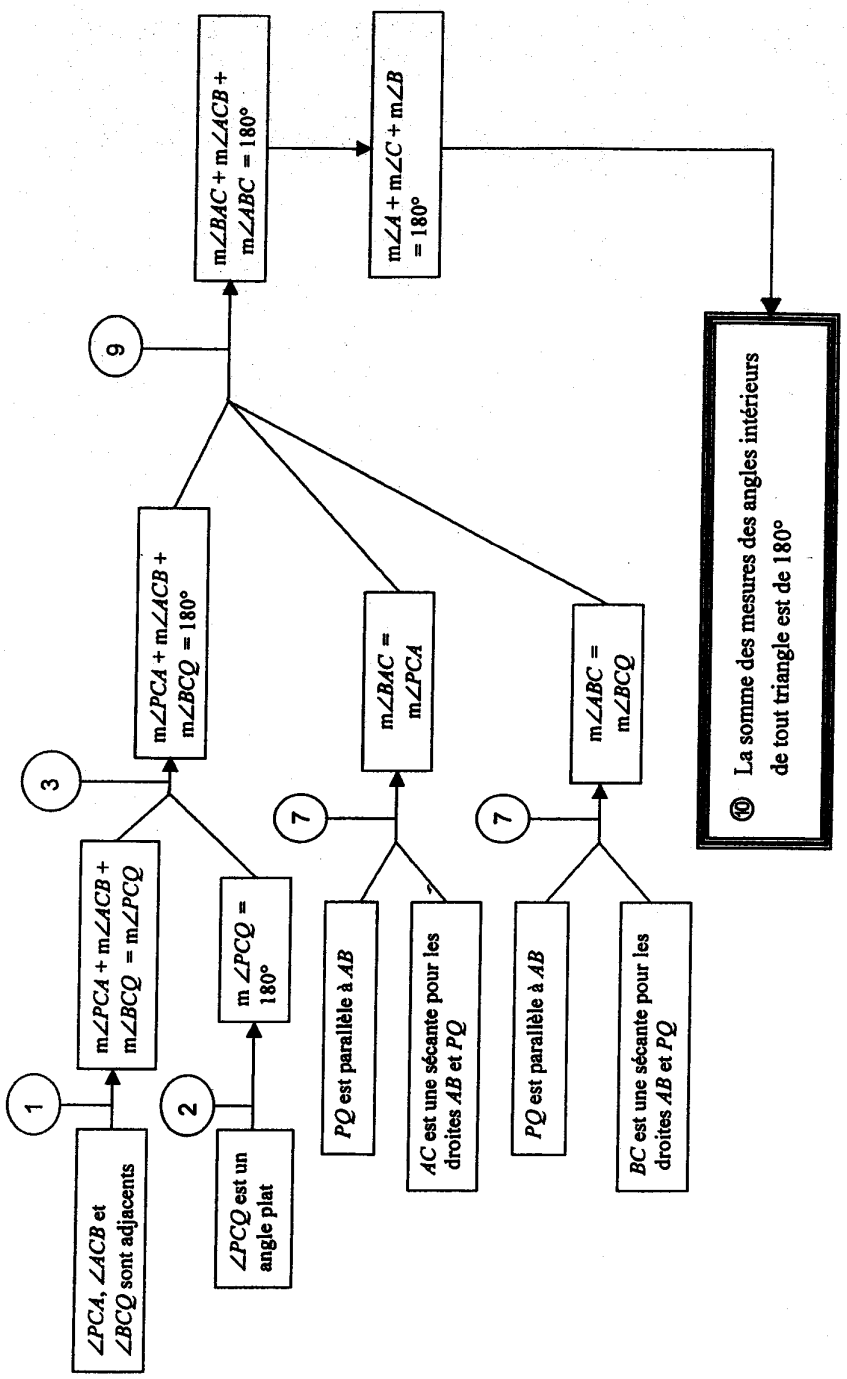
ANNEXE 4

Solution pour la deuxième tâche



ANNEXE 5

Solution pour la troisième tâche



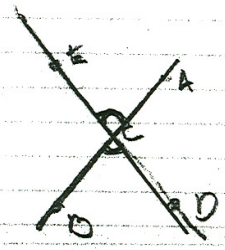
ANNEXE 6

Une production d'élève pour la première tâche

Pourquoi les angles opposés par le sommet ont la même mesure?

Lorsque l'on construit deux angles opposés par le sommet on construit inévitablement plusieurs angles (bien plus que deux ou quatre)

Ex



(Je n'ai pas seulement construit ∠AED ou ∠DCB mais aussi ∠DCA et bien d'autres angles)

Donc, pour vous prouver ce que je vais avancer construisez vous-même deux angles opposés par le sommet ou bien observez bien celui que j'ai fait et que vous avez sous les yeux et tentez de trouver tous les angles supplémentaires de chacuns et notez-les sur un bout de papier.

C'est fait? Maintenant regardez bien, vous devez avoir remarqué que les deux angles ont un angle supplémentaire en commun.

Conclusion:

C'est ~~assez~~ simple, si vous et votre ami marquez du même montant d'argent pour acheter le même vêtement au même prix c'est parce que vous disposez du même montant d'argent! Même chose pour nos deux angles ~~supplémentaires~~ opposés par le sommet, s'ils ont le même angle supplémentaire c'est qu'il leur manque le même nombre de degrés pour atteindre 180°

ANNEXE 7

Une production d'élève pour la troisième tâche

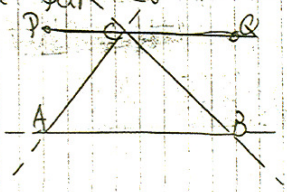
Message pour l'élève Thomas, de l'école des Sept Traues

ΔABC est un triangle quelconque

Je vais prouver que $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$

je prolonge les cotés du triangle

Je trace l'unique parallele à la droite AB qui passe par C



je place P et Q sur cette droite

$RQ // AB$

$\angle ACB$ est opposé par le sommet à $\angle RCS$

$\angle ABC$ et $\angle PCR$ sont ~~Alterne interne~~ correspondant

$\angle BAC$ et $\angle SCQ$ sont ~~Alterne interne~~ correspondant

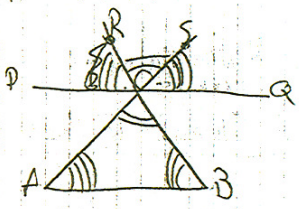
Alors $\angle PCR + \angle RCS + \angle SCQ = 180°$

et $\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180°$

$\angle PCR = \angle ABC$

$\angle RCS = \angle ACB$

$\angle SCQ = \angle BAC$



conclusion

$m\angle BAC + m\angle ACB + m\angle ABC = 180°$

tous les angles des triangles font 180°

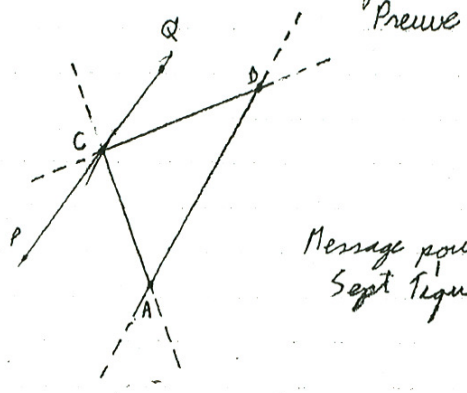
la somme des mesures des angle des triangles font 180°

ANNEXE 8

Une production d'élève pour la troisième tâche

Mathématique

Preuve



Message pour l'élève Thomas de l'école des Sept Tiques

$\triangle ABC$ est un triangle quelconque. Je vais prouver que $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$. Je prolonge les côtés du triangle. Je trace l'unique parallèle à la droite AB qui passe par C. La $m\angle PCA + m\angle ACB + m\angle BCQ = m\angle PCQ$. PCQ est un angle plat donc $m\angle PCA + m\angle ACB + m\angle BCQ = 180°$. AC est la sécante des parallèles AB et PQ donc $m\angle ABC = m\angle BCQ$ parce qu'ils sont alternes-internes. BC est la sécante des parallèles PQ et AB donc $m\angle BAC = m\angle PCA$ parce qu'ils sont alternes-internes. $m\angle BAC + m\angle BCQ + m\angle PCA = m\angle BAC + m\angle ACB + m\angle ABC$. Donc $m\angle BAC + m\angle ACB + m\angle ABC = 180°$. $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$.