La notion d'angle au début du secondaire (Première partie)

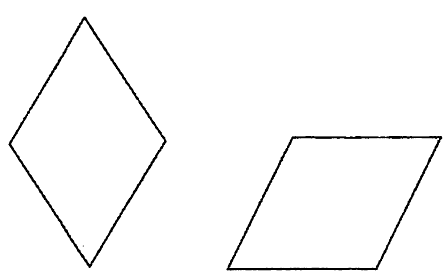
Denis Tanguay, UQAM, Département de mathématiques, section didactique
tanguay.denis@uqam.ca

De toutes les notions géométriques qu'a à reconstruire ou reconceptualiser l'élève dans son passage du primaire au secondaire, la notion d'angle est sans doute la plus difficile parce que la plus abstraite, la plus éloignée de son intuition.

1. Les géométries du primaire et du secondaire

La géométrie pratiquée au primaire pourrait être caractérisée comme la « géométrie du botaniste-décorateur » (Duval, 2005). Pour les élèves qui y travaillent, les objets géométriques sont de petites dimensions — celles de la feuille de papier — et sont distingués par des **caractéristiques visuelles de contour :** types de triangles et de quadrilatères, cercles et ovales, qu'on « classifie » selon leur forme exactement comme un botaniste classifie des plantes. Il s'agit alors d'observer les différences entre deux formes voisines (carré et rectangle, par exemple) ou les similitudes entre deux formes différentes (carré et parallélogramme, par exemple).

La visualisation est *iconique* : la reconnaissance est centrée sur le contour d'une zone 2D (ou 3D dans le cas des objets de l'espace) considérée en bloc, comme s'il s'agissait d'une image, d'une icône. Par exemple, un losange est « ce qui ressemble à un diamant ».



Le même quadrilatère, perçu différemment par un élève selon une visualisation iconique des figures[1]

Ces formes apparaissent comme stables et figées (dans une position privilégiée) pour l'élève qui aura de la difficulté à imaginer des transformations appliquées à une figure donnée, ou à repérer une sous-figure à l'intérieur d'une figure complexe. L'élève sera réticent à sortir du contour fermé de la figure, par exemple pour prolonger les côtés, ou tracer une hauteur qui « sort » d'un triangle. Les propriétés non liées au contour caractéristique (celles des diagonales d'un quadrilatère par exemple) ne seront pas facilement mobilisables.

Au secondaire, l'élève accède à ce que l'on pourrait appeler la « géométrie du menuisier-arpenteur-architecte ». Les propriétés des figures y sont validées empiriquement par **la mesure** (longueurs, angles, aires, volumes), ce qui ne peut guère se faire que sur des figures tracées, avec autant de précision que possible, à l'aide d'instruments : règle, équerre, compas, rapporteur, logiciels de géométrie... Le travail sur une figure à l'échelle d'une feuille de papier, d'un plan ou d'un écran d'ordinateur, est implicitement — ou parfois même explicitement — motivé par la possibilité de mettre en correspondance cette échelle avec des échelles de grandeur plus grandes : pièces, bâtiments, terrains ou même plans d'urbanisme, systèmes astronomiques. On n'est donc plus dans le contour fermé, on sait qu'on pourra prolonger des côtés, imaginer des déformations, des agrandissements ou rétrécissements, des déplacements, des rotations. On sait aussi que ces déformations pourraient avoir un effet (de structure) sur les éléments secondaires : côtés, angles, diagonales, alignement...

La mesure et le tracé aux instruments induisent en effet une exploration des éléments constitutifs de la figure; le didacticien R. Duval (2005) parle de la « déconstruction dimensionnelle des formes » : analyse et dissociation des éléments 0D (sommets, points de rencontre...), 1D (côtés, diagonales...), 2D dans la figure plane; ou

[1] On objectera qu'il n'est pas faux de considérer le quadrilatère de droite comme un parallélogramme puisque les losanges sont des cas particuliers de parallélogrammes. Mais il faut bien comprendre que pour un élève du primaire qui a une telle visualisation iconique (un élève de *niveau van Hiele 1* : voir par exemple Crowley, 1987), le losange n'est généralement pas considéré comme un parallélogramme, de même que le carré n'est pas pour lui un rectangle.

encore, des éléments 0D, 1D, 2D, 3D dans le solide. Une telle analyse permet à l'élève de prendre conscience que la figure modélise un objet idéal, dans lequel par exemple le trait de crayon serait de largeur nulle. Il prend conscience que les propriétés de la figure sont plus que des caractéristiques purement visuelles : elles découlent de liens structurels, des liens de cause à effet, qu'il faut alors chercher à dégager et à comprendre. Par exemple, il est dans la structure même des quadrilatères à quatre côtés isométriques que d'avoir des diagonales perpendiculaires partageant le même milieu.

L'élève accède ainsi progressivement à une modélisation ensembliste des objets de la géométrie : ceux-ci sont des sous-ensembles de l'ensemble des points du plan. Ils sont « idéaux » et abstraits, parce que constitués d'une infinité de points sans dimension, de droites ou de segments qui n'ont pas de largeur et peuvent s'étendre à l'infini, dans une surface plane qui n'a pas d'épaisseur. Les cercles, par exemple, y sont supposés parfaits. Les figures qui représentent graphiquement ces objets sont de plus « génériques », c'est-à-dire qu'elles constituent chacune un représentant sans particularité de toutes les figures possibles (de tous les « cas de figure ») vérifiant les mêmes hypothèses.

2. De la mesure à la preuve

Quand on mesure, on cherche à être aussi précis que possible, on se rend vite compte que certaines mesures « tombent » entre deux gradations sur l'instrument, que la gradation est trop grossière, on raffine si possible les gradations, les instruments et les méthodes de mesure. La démarche véhicule donc *en elle-même*, intrinsèquement, *l'idée que notre perception est limitée*, qu'il peut y avoir imprécision ou erreur de mesure, et qu'on peut et doit améliorer la fiabilité de la validation. Idéalement, l'enseignant voudrait bien profiter de cet conscience accrue, développée par l'élève sur les limites de la mesure, pour l'éveiller à cette autre forme de validation qu'est le *raisonnement déductif*. Ou en d'autres termes, l'enseignant viserait, idéalement, à ce qu'à la fin du secondaire, les élèves aient passé de la géométrie du menuisier à la *géométrie du mathématicien*, qui est la (bonne vieille) géométrie d'Euclide, avec ses axiomes, ses définitions, ses théorèmes et surtout ses *preuves*!

Mais ce passage est difficile, justement parce que la mesure, si elle n'est pas adéquatement intégrée à cette transition de la géométrie du menuisier à la géométrie du mathématicien, peut s'ériger en obstacle. Le danger est grand, en effet, de lui donner toute la place, et bien des élèves auront tôt fait de ne recourir qu'à elle comme unique moyen de validation. Les logiciels de géométrie dynamique comme Cabri-géomètre ou GeoGebra peuvent de surcroît amplifier cette mainmise des validations empiriques et expérimentales sur les validations déductives. Comment ensuite faire comprendre à l'élève quels sont les « termes du contrat » en géométrie : « sur quoi s'est-on basé pour affirmer ce résultat? Que doit-on faire pour le valider? Quand ai-je le droit de me fier à la figure? Sur combien de 'cas' me suffit-il de vérifier? Qu'ai-je le droit d'affirmer et quand? » (Tanguay, 2009, p. 13); mais surtout LA grande question : pourquoi prouver si les mesures m'ont (déjà) convaincu?

Bien qu'elle ait fait l'objet de l'attention de nombreux didacticiens depuis les années 80 (voir par exemple Arsac, 1998, ou Tanguay, 2005, 2002), la question de cette transition vers la géométrie déductive n'est certainement pas résolue. Je me contenterai ici de donner quelques pistes de réflexion. Il m'apparaît important, par exemple, que l'enseignant sache présenter les mesures non pas comme la validation ultime du résultat, mais bien comme *les premiers pas vers la formulation d'une conjecture*, en une *démarche scientifique* visant une première vérification expérimentale, exactement comme on testerait une des lois de Newton dans un laboratoire de physique. Il s'agit alors pour l'enseignant d'utiliser les erreurs de mesure pour motiver auprès des élèves la nécessité d'une validation qui irait plus loin, et qui serait basée sur un raisonnement au moins en partie déductif. Il s'agit aussi de convaincre les élèves qu'une preuve déductive peut nous aider à comprendre *pourquoi le résultat est vrai*, peut *expliquer* le résultat, alors que la vérification expérimentale ne fait que *montrer que c'est vrai* (Hanna, 1995), sans que l'infinité des cas possibles ne soit jamais complètement embrassée par cette vérification.

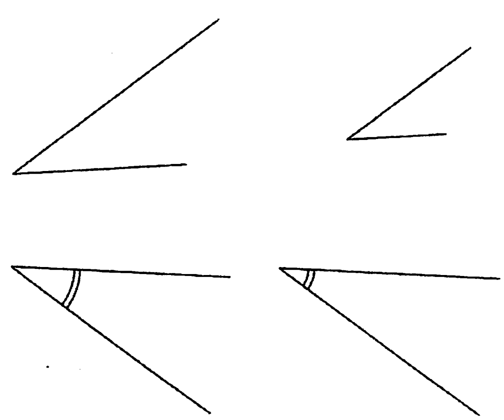
Une autre voie, peut-être plus pragmatique et plus facile à mettre en œuvre, est d'initier les élèves à la démonstration aussitôt que possible, en les faisant travailler sur des preuves simples dès le début du secondaire. Mais pour cela, l'élève doit non seulement être capable de produire les énoncés vrais qui interviennent dans la preuve, mais il doit aussi les organiser en un raisonnement valable, en invoquant les bonnes « raisons » aux bons moments (voir par exemple Tanguay, 2006, 2005). Or, pour cela, il est essentiel de pouvoir compter sur un système de définitions qui soit cohérent, qui se tient. Cette cohérence n'est pourtant pas toujours au rendez-vous dans les manuels, en particulier pour la notion d'angle, et c'est à celle-ci et aux preuves à laquelle elle peut donner lieu que je vais m'attacher dans ce qui va suivre.

3. Deux conceptions erronées des élèves sur l'angle

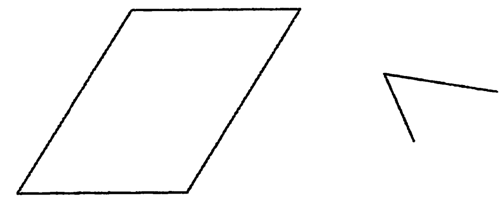
La notion d'angle est en effet particulièrement problématique dans le passage de la géométrie du botaniste à la géométrie du menuisier. Parce que l'angle est travaillé au primaire comme un objet du micro-espace (l'espace de la feuille de papier) et appréhendé selon une visualisation iconique, il est conçu par beaucoup d'élèves de première secondaire comme :

- deux segments ayant une extrémité commune; ou encore,
- une forme caractérisée par son contour fermé, d'une « grosseur » déterminée, la « pointe de tarte ».

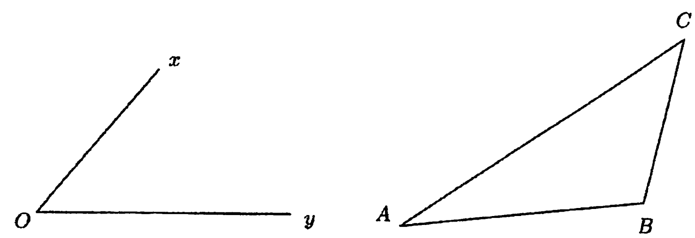
Quand on demande à des élèves de comparer les deux angles de chacune des paires ci-dessous, nombreux parmi eux seront-ils à dire que l'angle de gauche est plus grand que l'angle de droite, alors qu'il s'agit d'angles de même mesure (Berthelot et Salin, 1996).



Berthelot et Salin ont aussi donné la consigne aux élèves de reproduire le parallélogramme ci-contre en utilisant l'angle déjà tracé. Ils n'obtiennent que 55% de réussite, et 13% des élèves ne répondent pas. Comme on peut s'y attendre, l'erreur la plus fréquente est de faire des deux segments au bord de l'angle les côtés du parallélogramme, sans les prolonger pour leur donner la bonne longueur.



Quand, dans la même étude, on demande aux élèves de tracer la bissectrice de l'angle xOy, les élèves réussissent à 69%, alors que la réussite tombe à 28% quand on demande de tracer la bissectrice de $\angle BAC$, avec 25% des élèves qui ne répondent pas, et plusieurs (l'étude ne précise pas combien) qui traitent l'angle $\angle B$.



On s'en doute bien, les conceptions « pointe de tarte » ou « segments joints en une extrémité » sont très probablement à la source de beaucoup de ces erreurs et difficultés. Avant de chercher comment les contrer ou les minimiser, il convient d'abord de creuser les questions suivantes :

– en quoi consiste mesurer un angle, qu'est-ce qu'on mesure au juste quand on mesure un angle?

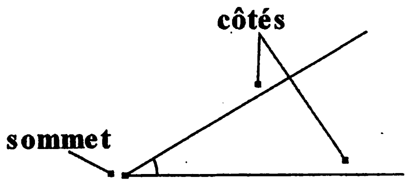
– que signifie exactement « comparer deux angles », quand peut-on dire qu'un angle est plus grand qu'un autre si la « grosseur de la pointe de tarte » ou la « longueur des côtés » n'intervient pas?

4. Comment définir un angle?

Et pour répondre à ces questions, il faut auparavant savoir ce qu'est un angle, il faut définir l'objet géométrique en question. Voici quelques définitions proposées par des manuels du secondaire :

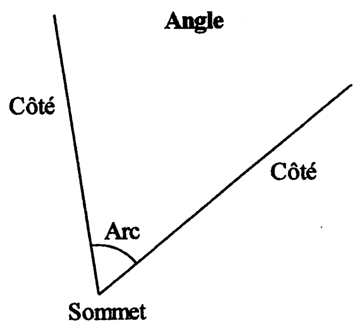
Dans *À vos maths!*

> Un **angle** est un objet géométrique formé de deux demi-droites ayant la même origine. L'origine des demi-droites est le **sommet** de l'angle. Les demi-droites sont les **côtés** de l'angle.
>
> Exemple :



Dans le « Calepin des savoirs » de *Panoram@th* :

> Un angle est une figure géométrique formée de deux demi-droites ayant la même origine. L'origine des demi-droites est le **sommet** de l'angle et les deux demi-droites sont les **côtés** de l'angle.
>
> On indique généralement l'ouverture de l'angle par un arc de cercle.



Dans le glossaire de *Perspectives mathématiques* :

> Lorsque deux lignes droites sont issues d'un même point, l'écartement entre ces deux lignes détermine un angle. Plus les lignes sont écartées, plus l'angle est grand. Le point de rencontre de ces deux lignes est appelé le « sommet de l'angle » et chacune des parties de ligne déterminant l'écartement est appelée le « côté de l'angle ». Le degré est l'unité de base pour mesurer les angles.

En lisant ces définitions, la première chose que je remarque est le statut flou de l'angle. Qu'est-ce qu'un angle? Qu'est-ce qu'on désigne exactement quand on parle de « l'objet », de la « figure » formés par deux demi-droites d'extrémité commune? Quel est exactement l'ensemble des points du plan constitué par l'angle? La réunion des deux demi-droites[2]? Parler « d'écartement entre deux lignes » est encore plus glissant à mon avis, parce qu'on mêle alors allègrement l'angle et sa mesure. La mesure d'un angle, comme toute mesure, est **un nombre** et ce nombre permet effectivement d'évaluer de combien les côtés de l'angle sont « écartés ». Mais l'angle est-il alors le nombre? Où est l'ensemble des points auquel on attache ce nombre, quel est-il? Que désigne le mot « écartement » dans la définition de *Perspectives*? Un nombre? Une figure? Ou une propriété de cette figure? Et dans ce dernier cas, quel ensemble de points du plan a cette propriété?

Si l'angle est vraiment la figure formée par deux demi-droites, comment se fait-il que dans chacune de ces collections, l'on considère ensuite **deux angles** formés par la même figure, par **la même paire de demi-droites** : l'angle saillant et l'angle rentrant. Dans Panoramath, par exemple, au bas de la même page (p. 166) d'où est extraite la définition ci-dessus, on peut voir:

On classe les angles selon leur mesure.

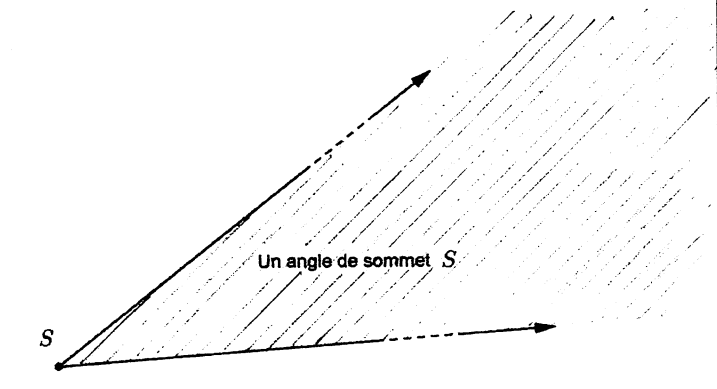
Angle nul	Angle aigu	Angle droit	Angle obtus
mesure = 0°	0° < mesure < 90°	mesure = 90°	90° < mesure < 180°

Angle plat	Angle rentrant	Angle plein
mesure = 180°	180° < mesure < 360°	mesure = 360°

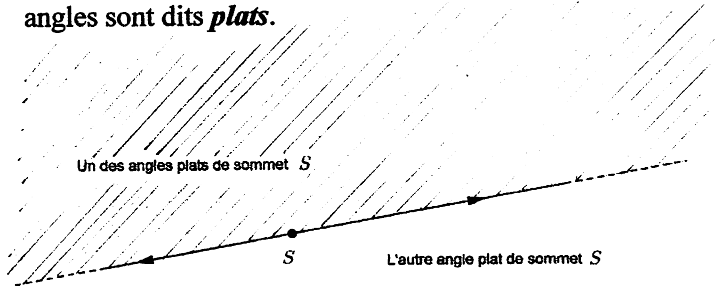
Il n'y a bien qu'une seule paire de demi-droites dans la 6e case, alors pourquoi formerait-elle tout à coup deux angles, l'un saillant et l'autre rentrant? Il me semble important d'éviter de telles incohérences et d'identifier avec précision quel est l'ensemble des points du plan désigné par « angle ». Je propose pour cela la définition suivante.

[2] Dans beaucoup d'ouvrages avancés, comme les célèbres *Grundlagen der Geometrie* de David Hilbert, l'angle est effectivement défini comme la réunion de deux demi-droites de même extrémité, mais les angles y sont tous de mesures strictement comprises entre 0 et 180° : pas d'angle nul, d'angle plein, d'angle rentrant, pas même d'angle plat! Le développement géométrique qui en résulte est parfaitement rigoureux et cohérent, mais n'est pas adapté au travail visé par le secondaire.

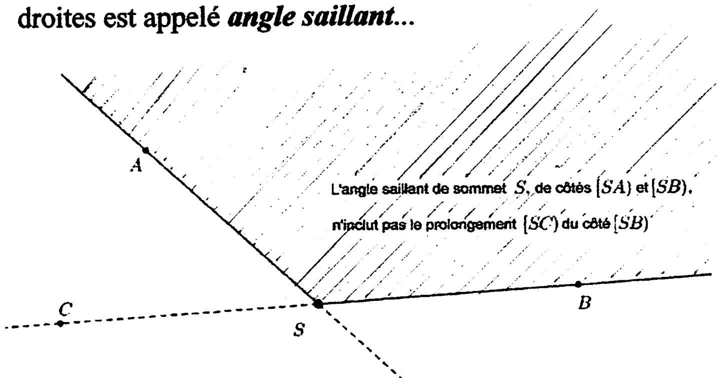
Multi-définition. Deux demi-droites de même extrémité partagent le plan en deux régions. Chaque région, incluant les deux demi-droites et leur extrémité, est appelée angle. Les deux demi-droites sont les *côtés* de l'angle, l'extrémité commune est le *sommet* de l'angle.



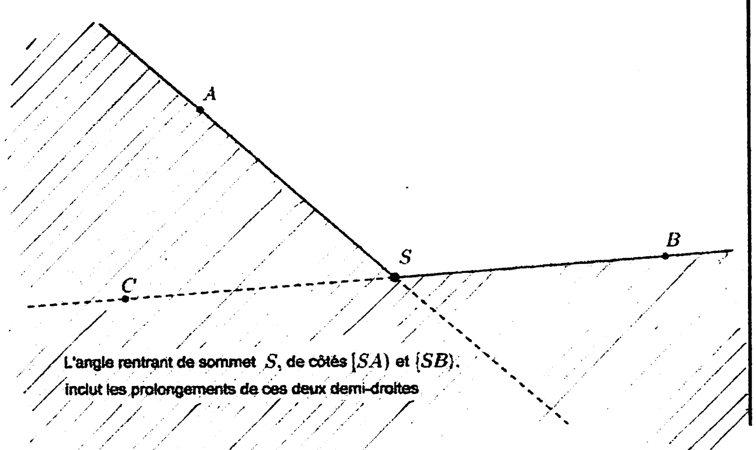
Si les deux demi-droites sont opposées, alors les deux angles sont dits ***plats***.



Sinon, l'angle qui n'inclut pas le prolongement des demi-droites est appelé ***angle saillant***...



... et l'autre est appelé ***angle rentrant***.



Dans la seconde partie du présent article, à paraître dans le prochain numéro d'Envol, je discuterai de cette définition et je suggérerai quelques pistes pour travailler l'angle en début de secondaire, notamment comme contexte où mettre en œuvre un enchaînement de preuves accessibles aux élèves de ce niveau.

BIBLIOGRAPHIE

Arsac, G. (1998). Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France. *Recherches en didactiques des mathématiques*, vol. 9, n°3, pp. 247-280.

Berthelot, R. et Salin, M.-H. (1996). L'enseignement des angles aux élèves de 10 à 13 ans : identification d'un obstacle didactique. *Revue des Sciences de l'Éducation,* vol. XXII, n°2, pp. 417-442.

Crowley, Mary L. 1987. The van Hiele Model of the Development of Geometric Thought. Dans *Learning and Teaching Geometry, K-12,* Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de didactique et de sciences cognitives* (IREM de Strasbourg), n°10, pp. 5-53.

Hanna, G. (1995). *Challenges to the Importance of Proof.* For the Learning of Mathematics, vol. 15, n° 3, pp. 42-49.

Tanguay, D. (2009). Le volume de la pyramide. *Envol*, n° 149 (oct.-nov.-déc.), pp. 9-19.

Tanguay, D. (2006). Comprendre la structure déductive en démonstration. Revue *Envol*, n° 134 (janv.-fév.-mars), pp. 9-17.

Tanguay, D. (2005). Apprentissage de la démonstration et graphes orientés. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, Vol. 10, pp. 55-93.

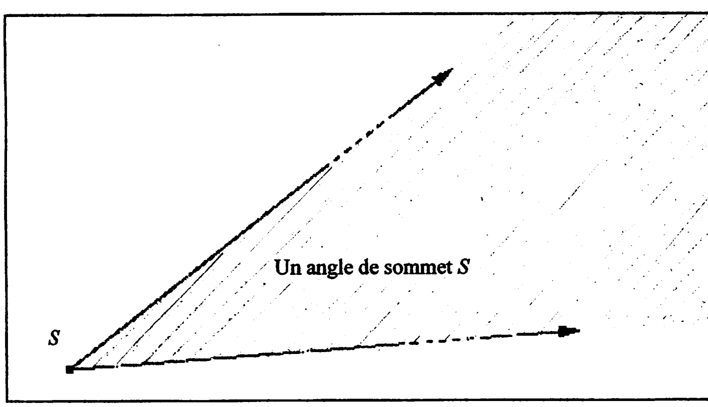
Tanguay, D. (2002). Analyse des problèmes de géométrie et apprentissage de la preuve au secondaire. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et de la technologie,* vol. 2, n°3, pp. 371-396.

La notion d'angle au début du secondaire (deuxième partie)

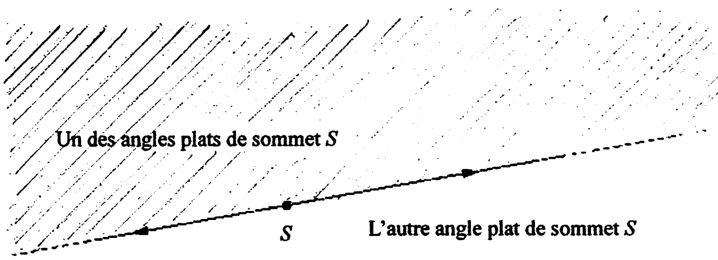
Denis Tanguay, UQAM, Département de mathématiques, section didactique
tanguay.denis@uqam.ca

Dans la première partie de l'article, j'ai souligné que les définitions de « l'angle » proposées par les manuels n'étaient à mon avis pas assez précises, ne permettaient pas de savoir exactement quel était l'ensemble des points du plan en cause quand il est question d'angle. J'ai relevé qu'en outre, elles donnaient lieu à une incohérence non anodine quand vient le temps de considérer les angles saillant et rentrant formés par la même paire de demi-droites. Je reprends d'abord la définition que je propose pour l'angle.

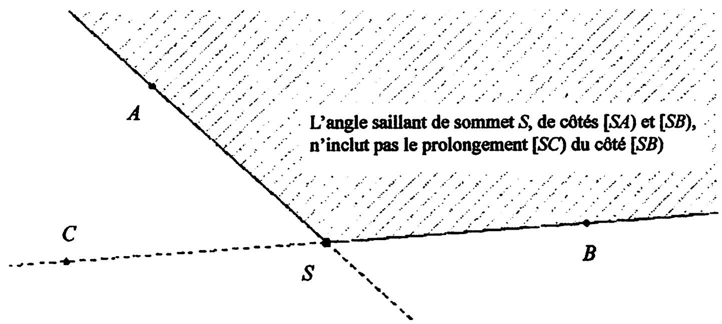
Multi-définition. Deux demi-droites de même extrémité partagent le plan en deux régions. Chaque région, incluant les deux demi-droites et leur extrémité, est appelée *angle*. Les deux demi-droites sont les *côtés* de l'angle, l'extrémité commune est le *sommet* de l'angle.



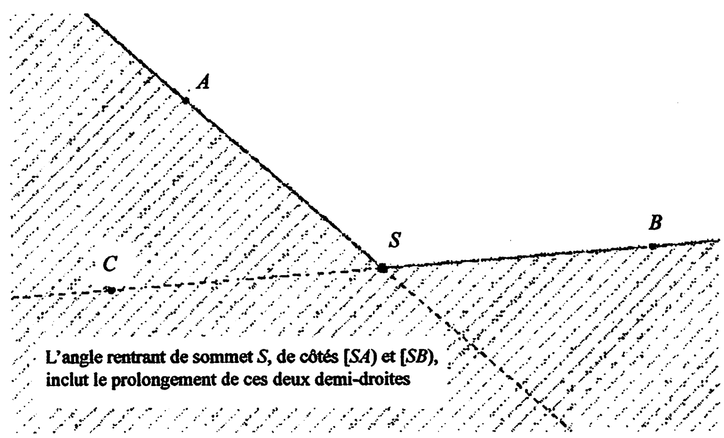
Si les deux demi-droites sont opposées, alors les deux angles sont dits ***plats***.



Sinon, l'angle qui n'inclut pas le prolongement des demi-droites est appelé ***angle saillant***...



... et l'autre est appelé ***angle rentrant***.



5. Quelques remarques sur cette « multi-définition »

D'abord la notation : quand on connaît deux points A et B sur chacun des côtés de l'angle, on peut désigner l'angle par $\angle ASB$, la lettre du milieu étant toujours réservée pour le sommet. Si le contexte ne permet pas de préciser lequel de l'angle saillant ou rentrant l'on désigne, alors il s'agira toujours (par défaut) de l'angle saillant.

a) J'ai fait le choix de faire des angles des régions *fermées* du plan, c'est-à-dire des régions qui incluent leur bord (à savoir les deux demi-droites et leur extrémité commune), mais l'on pourrait aussi décider que les angles sont des régions ouvertes, qui n'incluent pas leur bord. Il me semble cependant que pour les élèves, il est plus naturel de penser que les côtés et le sommet font partie de l'angle.

b) Le triangle, en tant que région du plan, correspond alors exactement, conformément à son étymologie, à l'intersection des trois angles saillants (les angles intérieurs du triangle) obtenus en prolongeant les côtés du triangle en demi-droites.

c) En tant qu'ensemble de points du plan, un angle plat n'est pas autre chose qu'un demi-plan. Cependant, il a ceci de particulier qu'on a sélectionné sur son bord un point et deux demi-droites au statut spécial : le sommet et les côtés de l'angle plat. Avant de définir l'angle plat, l'enseignant pourra rappeler que deux demi-droites sont dites *opposées* lorsqu'elles ont le même sommet et la même droite support, et sont de sens contraire sur cette droite support.

d) Je n'ai pas considéré dans la définition l'angle nul et l'angle plein parce qu'ils s'agit de deux cas « dégénérés ». En effet, on n'a alors qu'une seule demi-droite et non pas deux, au bord de l'angle. Si l'on veut en faire des angles au sens de la définition ci-dessus, on étire un peu les concepts et on parle de deux *demi-droites superposées*. En vertu de la remarque précédente (à savoir qu'il s'agit de régions fermées), l'angle nul est alors la demi-droite elle-même et l'angle plein est le plan tout entier.

e) Conceptuellement, c'est à mon avis une maladresse de faire intervenir les degrés dans la définition, par exemple pour identifier l'angle plat. Contrairement à la mesure des segments, la mesure des angles a ceci de particulier qu'elle peut être définie intrinsèquement, sans recourir à un étalon arbitraire. La définition que j'ai donnée de l'angle plat est en effet indépendante des unités de mesure. On peut ensuite subdiviser cet angle comme on veut pour définir l'unité de mesure choisie : en 180 unités pour les degrés, en 200 unités pour les grades ou en π unités pour les radians. Il faut bien sûr éviter le cercle vicieux : *l'angle plat est l'angle qui mesure 180° et le degré est le 180e de l'angle plat.*

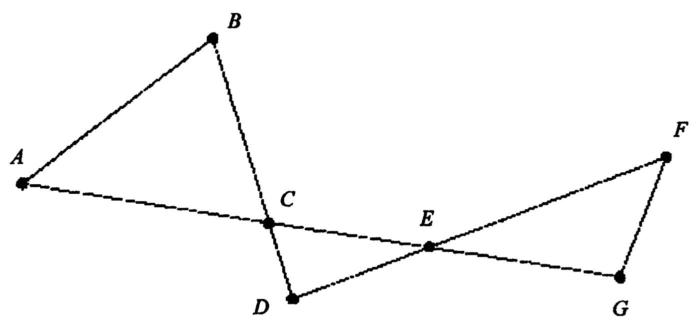
6. Premiers pas dans les traces de l'angle

Pour contrer les conceptions *angle = deux segments joints en une extrémité* ou *angle = pointe de tarte* (voir première partie de l'article, no 158 d'Envol, ou Berthelot et Salin, 1996), l'enseignant peut, dans un premier temps, faire faire des exercices de « lecture » des angles dans une figure, d'identification des angles dans des figures complexes. Par exemple :

a) Colore en gris l'angle $\angle$CEF.

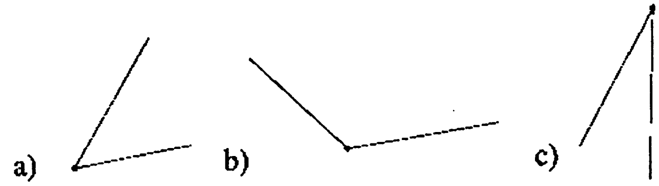
b) Hachure l'intersection des angles $\angle$BDF et $\angle$AGF.

c) ...



L'enseignant doit aussi bien faire comprendre en quoi consiste « mesurer » un angle : si tous les angles constituent des régions non bornées du plan, qui s'étendent à l'infini, comment peut-on les comparer, comment peut-on dire qu'un angle est plus grand ou plus petit qu'un autre, quel nombre attacher à l'angle pour rendre compte de cette relation? Il s'agit alors d'expliquer que mesurer un angle consiste à mesurer « l'écartement » entre les côtés de l'angle. Il s'ensuit qu'un angle de plus petite mesure qu'un autre est tel que si l'on transporte le sommet et un des côtés du petit angle pour les placer sur le sommet et un côté du plus grand angle, le plus petit, en tant que région (non bornée) du plan, sera entièrement inclus dans le plus grand. Mais il faut surtout, bien entendu, faire mesurer des angles, et si possible autrement qu'en une bête série d'exercices du style :

Mesure les angles



L'enseignant peut plutôt choisir de faire travailler la classe comme une véritable communauté de chercheurs-expérimentateurs, en distribuant des triangles de carton de tous formats et en demandant aux élèves de mesurer les angles de chaque triangle, pour ensuite faire la somme des trois mesures obtenues. En vue de désamorcer la conception « pointe de tarte », l'enseignant s'assurera d'avoir des triangles suffisamment petits pour que les élèves soient obligés de prolonger les côtés pour mesurer. Il peut aussi prévoir des triangles semblables, de formats nettement distincts (un triangle 5 fois plus grand qu'un autre, par exemple), pour que les élèves constatent que les mesures des angles sont malgré tout les mêmes.

Les données sont exposées en avant de la classe. Le fait, bien connu des enseignants, que les élèves éprouvent des difficultés à mesurer au rapporteur[1] doit être vu ici comme un atout : pratiquement aucun élève n'arrivera exactement à 180°, certains en seront même loin. Il s'agit alors de faire discuter en espérant que la conjecture « sorte », ce qui a de bonnes chances de se produire puisqu'il se trouve toujours au moins un élève pour avoir entendu l'énoncé dans ses classes du primaire ou ailleurs. L'enseignant pourra alors insister sur le fait qu'il ne s'agit pour l'instant que d'une conjecture, mais qu'une « vraie preuve mathématique » du résultat sera travaillée dans les jours à venir. Je propose dans ce qui suit une séquence menant à une preuve possible, accessible à des élèves du 1er cycle du secondaire.

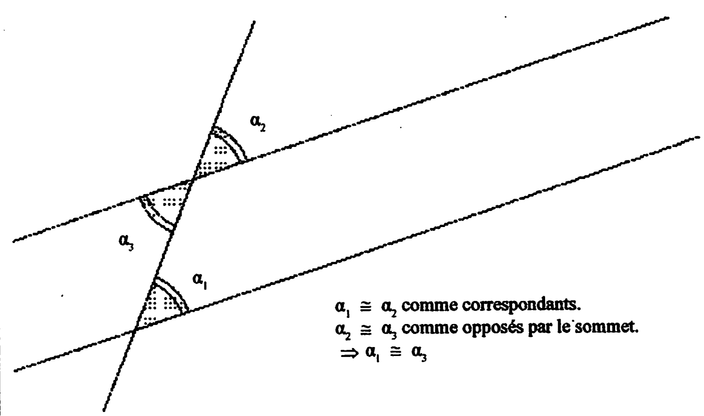
7. Des angles et des preuves

Une première preuve à travailler avec les élèves : les angles opposés par le sommet ont même mesure. Idée de la preuve attendue : ils ont un angle supplémentaire en commun. On consultera en annexe la preuve de ce résultat produite par une élève de première secondaire dans une école de Montréal où j'ai mené des expérimentations.

La classe peut ensuite décider d'admettre le fait, relativement évident mais difficile à prouver, que les angles correspondants, déterminés par deux parallèles coupées par une sécante, ont même mesure. On en fait donc un axiome. Que ce mot soit utilisé ou non, il m'apparaît important que l'enseignant identifie clairement l'énoncé comme un résultat admis sans preuve. Il peut argumenter que les deux parallèles ont exactement la même « orientation » dans le plan, qu'il est donc intuitivement raisonnable qu'une sécante commune ait le même « écartement » avec chacune des deux parallèles et les coupe selon des angles de même mesure. Mais cette argumentation ne constitue pas véritablement une preuve.

La question de la réciproque devrait elle aussi être discutée par la classe, et bien distinguée de l'implication directe : si une sécante coupe deux droites en faisant des angles correspondants isométriques, ces deux droites seront-elles forcément parallèles? La réponse est oui, et l'énoncé peut lui aussi faire l'objet d'un axiome, d'un énoncé institutionnalisé mais admis sans preuve. Il en a effet les caractéristiques d'un axiome, étant accessible à l'intuition mais difficile à prouver sans développer des théories auxiliaires élaborées.

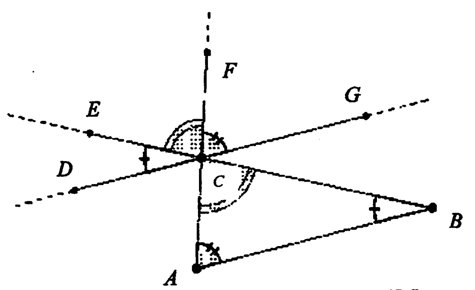
Ces résultats admis, la classe peut ensuite se pencher sur la preuve que les alternes-internes, déterminés par deux parallèles coupées par une sécante, ont même mesure. L'argumentation attendue? L'opposé par le sommet de l'un est correspondant pour l'autre. Même chose pour les alternes-externes. Les corollaires (ou cas particuliers) suivants peuvent être énoncés et travaillés : « quand deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre » et sa réciproque, « si deux droites ont une perpendiculaire en commun, alors elles sont parallèles ».



$\alpha_1 \cong \alpha_2$ comme correspondants.
$\alpha_2 \cong \alpha_3$ comme opposés par le sommet.
$\Rightarrow \alpha_1 \cong \alpha_3$

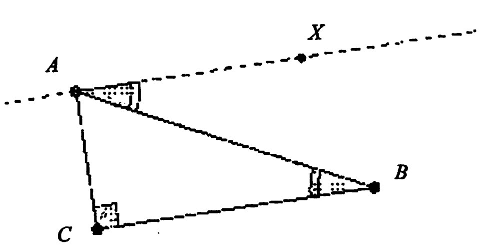
[1] Les élèves font par exemple coïncider la tranche du rapporteur, plutôt que la ligne noire, avec le côté de l'angle, ou ne font pas coïncider l'origine avec le sommet de l'angle. Ils peuvent aussi lire la mesure sur la mauvaise gradation (horaire plutôt qu'anti-horaire, ou l'inverse). Ils peuvent lire sur la bonne gradation mais « dans le mauvais sens », par exemple en interprétant la « coche » à gauche de 40° comme 39° plutôt que comme 41° (comme il le ferait sur une règle graduée, où ils lisent toujours de gauche à droite). Et bien sûr, ils peuvent ne pas mesurer le bon angle quand la figure est moindrement complexe.

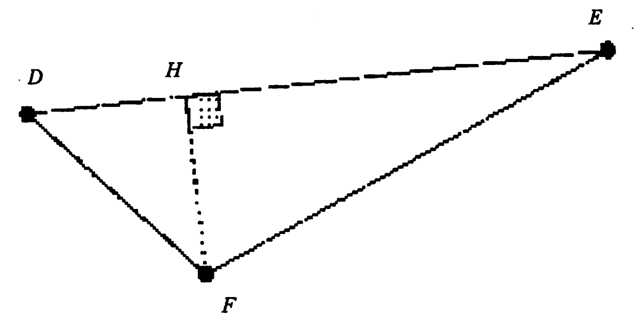
Finalement, tout est en place pour aborder la preuve que la somme des mesures des angles de tout triangle vaut 180°. Attention! Il ne faut pas mésestimer la difficulté que représente pour des élèves du premier cycle la preuve usuelle, consistant à tracer l'unique parallèle à AB passant par C, sommet de ΔABC, et d'invoquer ensuite l'isométrie des alternes-internes ainsi formés. En effet, la figure résultante est passablement compliquée, parce qu'elle demande de repérer et d'isoler deux configurations « deux parallèles et une sécante » distinctes. Une alternative possible est de « passer de l'autre côté de la parallèle » pour considérer les correspondants, plus faciles à repérer que les alternes-internes. Sauf qu'une difficulté s'ajoute alors : l'isométrie des opposés par le sommet au sommet C doit être invoquée.



$\angle DCE \cong \angle ABC$ comme correspondants,
$\angle FCG \cong \angle CAB$ comme correspondants,
$\angle ECF \cong \angle ACB$ comme opposés par le sommet.

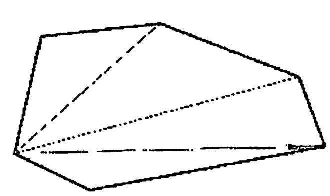
Je propose plutôt la démarche suivante, qui permet d'utiliser l'isométrie des alternes-internes dans une configuration beaucoup plus simple, plus facile à décoder, et qui initie par ailleurs les élèves à la « preuve par cas ». On fait d'abord la preuve pour les triangles rectangles. Considérons pour cela un triangle ΔABC, rectangle en C. Traçons AX, l'unique parallèle à BC passant par A. Elle est perpendiculaire à AC puisque BC l'est, en vertu du résultat qui dit que *quand deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre*. De plus, les angles $\angle BAX$ et $\angle ABC$ sont isométriques comme alternes-internes (déterminés par la sécante AB). On a donc par substitution que $m\angle ABC + m\angle BAC = 90°$ et on conclut, sachant que $\angle ACB$ est droit par hypothèse. Le résultat est donc vrai pour les triangles rectangles.



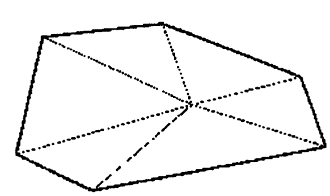


Pour généraliser à un triangle quelconque ΔDEF, il suffit de tracer la hauteur issue du sommet opposé au plus long côté, dont le pied H est toujours sur ce côté et non à l'extérieur (on admet ce résultat évident intuitivement comme un axiome). Le triangle est ainsi découpé en deux triangles ΔDFH et ΔEFH, rectangles en H, auxquels on applique ce qui vient d'être montré. La somme des mesures des angles de ΔDFH et ΔEFH donne 360°, et on conclut en retranchant les mesures des angles droits $\angle DHF$ et $\angle EHF$, qui ne doivent pas être comptabilisés.

Un des avantages de cette preuve est qu'elle se prête à divers niveaux de formalisation. Dans une classe faible, par exemple, on peut se contenter « d'argumenter » que le résultat est vrai pour les triangles rectangles, en affirmant « qu'avec deux copies de tout triangle rectangle, je peux faire un rectangle. » Ce résultat peut être illustré par une animation Cabri ou GeoGebra, à travers laquelle une copie d'un triangle rectangle, initialement superposée à celui-ci, pivote de 180° autour du milieu de l'hypoténuse, le triangle et son image formant en bout de course un rectangle. Même en admettant sans preuve le résultat pour les triangles rectangles, il reste largement de quoi raisonner pour un élève de première secondaire dans la généralisation aux triangles quelconques. La généralisation peut ensuite être poussée plus loin, aux polygones à n côtés : les formules $(n-2) \times 180°$ ou $(n \times 180°) - 360°$, pour la somme des mesures des angles intérieurs de ces polygones, sont tout à fait à la portée des élèves à qui l'on aurait donné l'indice « découpez-les en triangles », l'idée du découpage ayant déjà été instillée dans la phase précédente.



$(n-2) \times 180°$



$(n \times 180°) - 360°$

8. Conclusion

Abordé par le biais d'une activité expérimentale autour de la mesure, le résultat sur la somme des mesures des angles du triangle présente un caractère surprenant, non évident, qui peut servir de motivation à en bâtir et travailler la preuve avec les élèves. Or, « il est dans la nature des preuves de s'appuyer sur des propositions prouvées et de s'enchaîner ainsi les unes aux autres » (Rouche, 1989, p. 9). La nécessité de prouver le résultat sur les angles du triangle peut donc servir à son tour de motivation pour prouver les résultats plus faciles, sur lesquels on s'appuiera : isométrie des alternes-internes, des opposés par le sommet, parallélisme et perpendicularité… Même si ces résultats sont facilement vérifiables empiriquement, en mesurant, les prouver apporte quelque chose de plus, explique *pourquoi c'est vrai*, et donne aux élèves la satisfaction de comprendre des raisonnements bien structurés, clairement organisés, sans faille, une satisfaction à laquelle peu d'entre eux restent insensibles. En outre, la démarche leur permet de voir l'édifice mathématique s'ériger pierre par pierre, avec la preuve pour ciment, et cette cohésion de l'ensemble constitue la beauté des mathématiques, à laquelle l'enseignant voudrait bien les sensibiliser.

Bibliographie

Berthelot, R. et Salin, M.-H. (1996). « L'enseignement des angles aux élèves de 10 à 13 ans : identification d'un obstacle didactique. » *Revue des Sciences de l'Éducation*, vol. XXII, n°2, pp. 417-442.

Rouche, N. (1989). « Prouver : amener à l'évidence ou contrôler des implications? » In *La démonstration mathématique dans l'histoire.* Colloque Inter-Irem Épistémologie et histoire des mathématiques, pp. 8-38. Besançon, France.

Tanguay, D. (2012). « La notion d'angle au début du secondaire (Première partie). » *Envol*, n° 158, pp. 33-37.

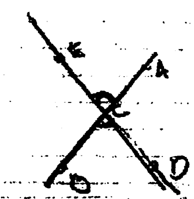
Annexe

Preuve que les angles opposés par le sommet ont même mesure, telle qu'elle a été rédigée par une élève de première secondaire.

Pourquoi les angles opposés par le sommet ont la même mesure ?

Lorsque l'on construit deux angles opposés par le sommet on construit inévitablement plusieurs angles (bien plus que deux ou quatre)

Ex



(Je n'ai pas seulement construit ∠AED ou ∠DCB mais aussi ∠DCA et bien d'autres angles)

Donc, pour vous prouver ce que je vais avancer construisez vous-même deux angles opposés par le sommet ou bien observez bien celui que j'ai fait et que vous avez sous les yeux et tentez de trouver les angles supplémentaires de chacuns et notez-les sur un bout de papier.

C'est fait? Maintenant regardez bien, vous devez avoir remarqué que les deux angles ont un angle supplémentaire en commun.

Conclusion:

C'est ~~assez~~ simple, si vous et votre ami manquez du même montant d'argent pour acheter le même vêtement au même prix c'est parce que vous disposez du même montant d'argent. Même chose pour nos deux angles ~~supplémentaires~~ opposés par le sommet, s'ils ont le même angle supplémentaire c'est qu'il leur manque le même nombre de degrés pour atteindre 180°